УДК 519.6
Багнюк Н.В., Завіша В.В., Решетило О.М
Луцький національний технічний університет

ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД ЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Багнюк Н.В., Завіша В.В., Решетило О.М. Градієнтний метод числової оптимізації задач нелінійного програмування В статті розглянуто застосування градієнтного методу для задач нелінійного програмування з обмеженнями. Наведений приклад.
Ключові слова: оптимізація. градієнтні методи, нелінійне програмування.
Форм. 8. Рис. 1. Літ. 2.

Багнюк Н.В., Завиша В.В., Решетило А.Н. Градиентный метод числовой оптимизации задач нелинейного программирования. В статье рассмотрено применение градиентного метода для задач нелинейного программирования с ограничениями.
Ключевые слова: оптимизация. градиентные методы, нелинейное программирование.

Bagnyuk N.V., Zavisha V.V., Reshetylo A.N. Gradient method numerical optimization for problems of nonlinear programming. The article deals with the application of the gradient method for nonlinear programming problems with restrictions.
Keywords: optimization. gradient methods, nonlinear programming.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв’язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв’язання окремих типів задач нелінійного програмування. Відомі точні методи розв’язання нелінійних задач, але в такому разі існують труднощі обчислювального характеру, тому для розв’язання нелінійних задач виправданим є застосування наближених методів.

Градієнтні методи належать до наближених числових методів розв’язування задач нелінійного програмування, оскільки дають точний розв’язок за нескінченне і лише в окремих випадках за скінченне число кроків. З їх використанням можна розв’язувати будь-яку задачу нелінійного програмування, знаходячи, як правило, лише локальний екстремум. Тому застосування цих методів дає найбільший ефект для розв’язування задач випуклого програмування, де локальний екстремум є одночасно і глобальним.

Розглянемо спочатку задачу максимізації функції $f(x)$, коли обмеження на область зміни змінних x відсутні. Пошук екстремального значення функції $f(x)$ можна починати з будь-якого допустимого розв’язку, наприклад, з точки $x_k = (x_{1k}; ...; x_{nk})$.

Градієнтом $\nabla f(x)$ функції $f(x)$ в точці x_k називається вектор, координатами якого є значення в цій точці частинних похідних першого порядку відповідної змінної, тобто

$$\nabla f(x_k) = (\frac{\partial f}{\partial x_{1k}};...;\frac{\partial f}{\partial x_{nk}}).$$

Градієнт функції в цій точці вказує напрямок найшвидшого зростання функції $f(x)$.

Переміщення з точки x_k вздовж градієнту в нову точку x_{k+1} відбувається по прямій, рівняння якої

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \nabla f\left(x_k\right). \quad (1)$$

де λ_k – числовий параметр, від величини якого залежить довжина кроку переміщення $\Delta x_k = \lambda_k \nabla f\left(x_k\right)$. Величина λ_k, при якій досягається найбільший приріст функції, може бути визначена з необхідної умови екстремуму функції

$$\frac{d\left[\nabla f\left(\lambda_k\right)\right]}{d\lambda_k} = \nabla f\left(x_{k+1}\right)\nabla f\left(x_k\right) = 0. \quad (2)$$

Чергову точку x_{k+1} визначаємо після обчислення параметру λ_k (для цього підставляємо значення $\boldsymbol{\lambda_k}$ в формулу (1) на пошуковій траєкторії). В цій ($\boldsymbol{x_{k+1}}$) точці знову знаходимо градієнт, а рух відбувається далі по прямій $\boldsymbol{x_{k+2} = x_{k+1} + \lambda_{k+1}\nabla f(x_{k+1})}$ у напрямку нового градієнту $\boldsymbol{\nabla f\ (x_{k+2})}$ до точки $\boldsymbol{x_{k+2}}$, в якій досягається найбільше значення функції $\boldsymbol{f(x)}$ в цьому напрямку і т.д. Розв'язування триватиме доти, поки не буде досягнута точка $\boldsymbol{x^*}$, в якій градієнт функції дорівнює нулю. В цій точці $\boldsymbol{x^*}$ цільова функція $\boldsymbol{f(x^*)}$ і буде набувати максимального значення.

Тепер розглянемо випадок розв'язування задачі нелінійного програмування з обмеженнями. Припустимо, що задача полягає в наступному: необхідно знайти максимум функції $\boldsymbol{f(x)}$ за обмежень

$$a_i x \le b_i\,,\quad x \ge 0\,, \qquad (3)$$
$$x = \left(x_1;\ldots x_n\right),\ a_i = \left(a_{i1};\ldots;a_{in}\right)$$

Крім того, будемо вважати, що функція $\boldsymbol{f(x)}$ є *ввігнутою диференційованою функцією.*

При розв'язуванні подібних задач трапляються два випадки:

1) <u>цільова функція має єдиний екстремум, і він знаходиться всередині області допустимих розв'язків</u>. Тоді процес розв'язування задачі (пошук оптимальної точки $\boldsymbol{x^*}$) нічим не відрізняється від уже розглянутого;

2) <u>цільова функція</u> набуває <u>свого екстремального значення в точці, що знаходиться на границі допустимої області</u>. В цьому випадку послідовність розв'язування задачі наступна. Якщо початкова точка $\boldsymbol{x_k}$ лежить всередині допустимої області (всі обмеження виконуються як строгі нерівності), то переміщуватися потрібно в напрямку градієнту. Але координати чергової точки $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \nabla f\left(x_k\right)$ повинні задовольняти обмеженням (3), тобто повинні виконуватись нерівності

$$\begin{cases} a_i\left[x_k + \lambda_k \nabla f\left(x_k\right)\right] \le b_i\,(i = 1,\ldots,m); \\ x_k + \lambda_k \nabla f\left(x_k\right) \ge 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Розв'язуючи систему (4) лінійних нерівностей, знаходимо проміжок $\left[\lambda'_k;\lambda''_k\right]$ допустимих значень параметру λ_k, при яких точка $\boldsymbol{x_1}$ буде належати допустимій області. Значення λ_k, яке одержується в результаті розв'язування рівняння (2)

$$\nabla f\left(x_k + \lambda_k \nabla f\left(x_k\right)\cdot \nabla f\left(x_k\right)\right) = 0\,,$$

повинно належати проміжку $\left[\lambda'_k;\lambda''_k\right]$. Якщо значення λ_k виходить за межі проміжку, то за λ_k^* приймається λ''_k. При цьому чергова точка пошукової траєкторії опиняється на граничній гіперплощині, що відповідає нерівності системи (4), виходячи з якої при розв'язанні системи отримано значення λ''_k.

Якщо початкова точка x_k лежить на граничній гіперплощині (або чергова точка пошукової траєкторії опинилась на граничній траєкторії), то напрямок переміщення визначається із розв'язку наступної допоміжної задачі математичного програмування:

$$T_k = \nabla f\left(x_k\right)\cdot r_k\left(\max\right) \qquad (5)$$

$$a_i r_k \le 0 \qquad (6)$$

для тих $\boldsymbol{i}$, при яких

$$a_i r_k = b_i\,, \qquad (7)$$

$$\left|r_k\right| = 1\,, \qquad (8)$$

де $r_k = \left(r_{k1};...;r_{kn}\right)$; $\left|r_k\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} r_{kj}^2}$.

Умова (7) визначає належність точки x_k границі допустимої області. Умова (6) означає те, що переміщення з точки x_k по вектору r_k буде відбуватися всередину допустимої області або по її границі, а умова (8) необхідна для обмеження величини r_k. Для наступної точки пошукової траєкторії

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k^* r_k$$

знаходиться значення параметра λ_k^*. При цьому використовується необхідна умова екстремуму:

$$\left(\nabla f\left(x_{k+1}\right)\cdot r_k\right) = 0 .$$

Процес розв'язування припиняється при досягненні точки x_{k+1}^*, в якій

$$T_k = \nabla f\left(x_{k+1}^*\right)\cdot r_k = 0 .$$

Запропонований метод розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 1. Знайти максимум функції $f = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$ за таких обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимізаційний пошук почати з точки $x_0 = (1,\ 0.5)$.

Розв'язування. Точка x_0 = (1; 0,5) лежить всередині допустимої області, значення функції в точці x_0 $f(x_0)$ = 8,75. За напрямок переміщення в наступну точку $\boldsymbol{x_1}$ приймаємо напрямок градієнту $\nabla f\left(x\right) = \left(8 - 4x_1;6 - 2x_2\right)$ в точці $\boldsymbol{x_0}$ = (1; 0,5).

Градієнт у точці $\boldsymbol{x_0}$ дорівнює $\nabla f\left(x_0\right) = \left(8 - 4\cdot 1;6 - 2\cdot 0.5\right) = \left(8 - 4;6 - 1\right) = \left(4;5\right) \ne 0$. Виходячи з цього, можна записати координати наступної точки

$$x_1 = x_0 + \lambda_0 \nabla f\left(x_0\right) = \left(1;0,5\right) + \lambda\left(4;5\right) = \left(1 + 4\lambda_0;0,5 + 5\lambda_0\right).$$

Визначимо проміжок допустимих значень для параметру λ_0, при яких точка x_1 буде належати допустимій області. В цьому випадку система нерівностей (4) має вигляд

$$\begin{cases} -1 - 4\lambda_0 + 0.5 + 5\lambda_0 \le 1; \\ 3 + 12\lambda_0 + 1 + 10\lambda_0 \le 6; \\ 1 + 4\lambda_0 \ge 0; \\ 0.5 + 5\lambda_0 \ge 0. \end{cases}$$

З розв'язку цієї системи знаходимо проміжок $\left[\lambda_0';\lambda_0''\right] = \left[-0,1;0,09\right]$. Розв'язавши рівняння

$$\frac{d\nabla f\left(\lambda_0\right)}{d\lambda_0} = \nabla f\left(x_1\right)\nabla f\left(x_0\right) = \left(4 - 16\lambda_0;5 - 10\lambda_0\right)\left(4;5\right) = 16 - 64\lambda_0 + 25 - 50\lambda_0 = 41 - 114\lambda_0 = 0 ,$$

визначимо значення параметру $\lambda_0 = 0,36$, при якому приріст функції Δf досягає найбільшої величини. Але значення $\lambda_0 = 0,36$ не належить проміжку $\left[\lambda_0';\lambda_0''\right] = \left[-0,1;0,09\right]$, тому приймаємо $\lambda_0^* = 0,09$.

Нова точка x_1 = (1,36; 0,95) знаходиться на граничній прямій, яка визначається другим обмеженням–нерівністю (тією нерівністю, якій відповідає значення $\lambda_0^* = 0,09$). В точці x_1 значення функції $f(x_1) = 11{,}98 > f(x_0) = 8{,}75$. Оскільки точка x_1 лежить на граничній прямій, то напрямок переміщення в наступну точку x_2 визначаємо за вектором r_1 (рух в напрямку градієнта виводить з допустимої області). Для визначення координат вектора r_1 запишемо допоміжну задачу (5) – (8):

знайти максимум функції

$$T_1 = \nabla f(x_1) \cdot r_1 = (2{,}56;4{,}1)(r_{11};r_{12}) = (2{,}56 r_{11} + 4{,}1 r_{12})$$

за обмежень

$$a_2 r_1 = (3;2)(r_{11};r_{12}) = 3r_{11} + 2r_{12} = 0\,;$$

$$|r_1| = \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2} = 1\,.$$

Система рівнянь цієї задачі має два розв'язки: (0,5568;–0,8352) і (–0,5568; 0,8352). Підставляючи ці розв'язки у функцію T_1, одержуємо, що максимальне значення функції $T_1 \neq 0$ і досягається при (–0,5568; 0,8352), тобто переміщуватися з x_1 треба вздовж вектору r_1 = (–0,5568; 0,8352) по другій граничній прямій (Рис. 1). Координати наступної точки x_2 дорівнюють

$$x_2 = x_1 + \lambda_1 r_1 = (1{,}36 - 0{,}5568\lambda_1; 0{,}95 + 0{,}8352\lambda_1),$$

а градієнт

$$\nabla f(x_2) = (2{,}56 + 2{,}2272\lambda_1; 4{,}1 - 1{,}67\lambda_1).$$

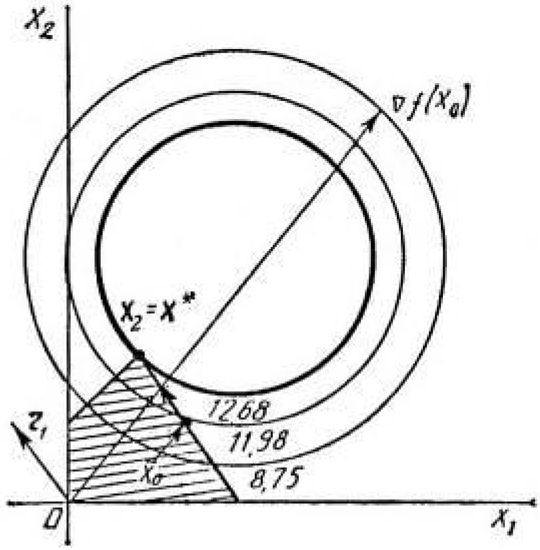

Рис 1. –Графічний розв'язок задачі

Знову визначаємо проміжок допустимих значень параметра λ_1, при яких точка x_2 буде належати допустимій області.

До системи обмежень, які повинна задовольняти точка x_2, не увійде друге обмеження, оскільки ця точка лежить на граничній прямій, визначеній цим обмеженням. Розв'язуючи дану систему, знаходимо проміжок

$$[\lambda_1'; \lambda_1''] = [-1{,}1; 1{,}01].$$

З використанням необхідної умови екстремуму

$$\frac{d\nabla f(\lambda_1)}{d\lambda_1} = \nabla f(x_2) \cdot r_1 = (2{,}56 + 2{,}2272\lambda_1) \times (-0{,}5568) + (4{,}1 - 1{,}6704\lambda_1) \times 0{,}8352 = 0$$

отримуємо $\lambda_1 = 2{,}2$. Але значення $\lambda_1 = 2{,}2$ не належить проміжку $[-1{,}1; 1{,}01]$, тому приймаємо

$\lambda_1^* = 1{,}01$. Нова точка x_2 = (1,36-0,557x1.01; 0,95+0,835x1,01)=(0,8; 1,8) лежить на перетині двох граничних прямих, які відповідають першій і другій нерівностям системи обмежень. У цій точці функція набуває значення $f(x_2) = 12{,}68 > f(x_1) = 11{,}98 > f(x_0) = 8{,}75$.Снову визначимо напрямок переміщення з точки x_2 – вектор $r_2 = (r_{21}; r_{22})$ та розглянемо наступну задачу:

знайти максимум функції

$$T_2 = \nabla f(x_2) \cdot r_2 = (2{,}56 + 2{,}227 \cdot 1{,}01; 4{,}1 - 1{,}67 \cdot 1{,}01)(r_{21} + r_{22}) = (4{,}88 r_{21} + 2{,}4 r_{22})$$

за обмежень

$$r_{21} + r_{22} = 0{,}3 r_{21} + 2 r_{22} = 0;$$

$$|r_2| = \sqrt{r_{21}^2 + r_{22}^2} = 1.$$

Система рівнянь задачі має розв'язок r_2 = (0; 0). Підставляючи одержаний розв'язок у функцію T, дістаємо, що максимум $T = 0$, а це означає те, що x_2 є точкою максимуму цільової функції в допустимій області, тобто $x_2 = x^*$ і max $f(x^*) = 12{,}68$. Як видно з рисунку 1, лінія рівня $f(x)$дотикається до границі допустимої області в точці x_2. Розв'язок знайдено.

Висновки

Сучасні вимоги до математичної підготовки інженера досить високі. Оскільки в більшості практично важливих випадків аналітичне розв'язання задач оптимізації важке або неможливе, необхідно володіти чисельними методами, розрахованими на застосування сучасних комп'ютерів.

В статті розглянуто застосування градієнтного методу, коли наявні обмеження на область зміни змінних x.

1. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю. Методи оптимізації в прикладах і задачах. Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2011. – 324 с.
2. Ржевський С.В., Александрова В.М. Дослідження операцій: Підручник. – К.: Академвидав, 2006. – 560 с.