УДК 514.18
Бадаєв Ю.І., Ганношина І.М.
Київська державна академія водного транспорту ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного (КДАВТ)

МОДЕЛЮВАННЯ NURBS – КРИВИХ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ ДВОЇСТОСТІ

Бадаєв Ю.І., Ганношина І.М. Моделювання NURBS-кривих. В статті пропонується новий метод проектування кривої, яка є огинаючою сім'ї відрізків прямих, визначених на основі NURBS-технології.
Ключові слова: NURBS-криві, огинаюча, кривина.

Бадаев Ю.И., Ганношина И.Н., Моделирование NURBS - кривых на основе принципа двойственности. В статье предлагается новый метод проектирования кривой, которая является огибающей семьи отрезков прямых, определенных на основе NURBS-технологии.
Ключевые слова: NURBS-кривые, огибающая, кривизна.

Badaev Y., Gannoshina I. Modeling NURBS- curves based on the principle of duality. The paper proposes a new design method of the curve which is the envelope of the family of straight segments defined on the basis of NURBS technology.
Keywords: NURBS-curves, the envelope, the curvature.

Постановка проблеми. В роботі проектувальників обводів, які працюють в рухомому середовищі, нерідко виникає задача проектування кривої, яка має наперед заданий закон зміни кривини.

Відомі методи не дають змоги розв'язувати поставлену задачу, тому необхідно створити нові підходи у розв'язанні цієї задачі.

В даній роботі пропонується проектування спеціальної кривої як огинаючої сім'ї відрізків прямих.

Такий підхід дає змогу в подальшому аналізувати закон зміни цих прямих, які є дотичними до кривої, що проектується. Вважаючи на те, що ці відрізки прямих задають перші похідні, то аналізуючи закон їх зміни, можна розв'язати задачу проектування кривої за заданим законом зміни кривини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останніх публікаціях [1-7] даються методи моделювання різних кривих, але не зазначаються підходи до аналізу їх форми і кривини уздовж кривої.

Метою даної статті є розробка методу проектування огинаючої сім'ї відрізків прямих, які визначаються на основі NURBS-технологій, що дає можливість аналізувати форму і закон зміни кривини.

Основна частина. Як відомо із проективної геометрії [1], пряму

$$ax + bx + c = 0 \tag{1}$$

можна розглядати, як точку із координатами a,b,c.

Застосуємо до цих координат формули визначення NURBS – кривих [2]:

$$a = a\left(t\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i, m(t) w_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i, m(t) w_i}, \tag{2}$$

$$b = b\left(t\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i, m(t) w_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i, m(t) w_i}, \tag{3}$$

$$c = c(t) = \frac{\sum N_i, m(t) w_i c_i}{\sum N_i, m(t) w_i} \tag{4}$$

де n – кількість заданих прямих, $N_i, m - B -$ сплайн по рядку m ..

Підставимо (3), (4) в (1). Отримаємо рівняння сім'ї прямих

$$a(t)x + b(t)y + c(t), \tag{5}$$

яке визначає її положення в сім'ї, де t – параметр сім'ї.

До цієї сім'ї прямих можна провести огинаючу криву, яка буде відмінна від кривої, що визначається за векторним рівнянням NURBS – кривої. Огинаюча крива визначиться системою [3]:

$$\begin{cases} f = \mathrm{a}(\mathrm{t})\mathrm{x} + \mathrm{b}(\mathrm{t})\mathrm{y} + \mathrm{c}(\mathrm{t}) = 0, \\ \dfrac{df}{dt} = a'(\mathrm{t})\mathrm{x} + \mathrm{b}'(\mathrm{t})\mathrm{y} + \mathrm{c}'(\mathrm{t}) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Виключимо із цієї системи *x* і *y*. Для цього помножимо перше рівняння на і віднімемо друге. Будемо мати:

$$x = \frac{c''(t) - c(t)\dfrac{b'(t)}{b'(t)}}{a * \dfrac{b'(t)}{b'(t)} - a''(t)}. \tag{7}$$

Аналогічно виключимо *x*, помноживши перше рівняння на $\dfrac{a'(t)}{a'(t)}$.

Отримуємо:

$$y = \frac{c'(t) - c\dfrac{a'(t)}{a'(t)}}{b * \dfrac{a'(t)}{a'(t)} - b''(t)}. \tag{8}$$

Рівняння (7) і (8) визначають нову параметричну криву. Переваги отриманої кривої полягають у тому, що дотична в кожній точці T (x,y) отриманої огинаючої визначаються формулою (1).

Дотична буде визначати похідну в заданій точці. Аналіз закону зміни першої похідної дасть змогу прогнозувати форму кривої, а також закон зміни кривими, що є важливим в проектуванні обводів машин, які працюють у рухомому середовищі: обводи літаків, автомобілів, суден тощо.

Для підтвердження достовірності описаного методу виведемо формули огинаючої кривої на основі кривих Безьє 2-го і 3-го порядку.

Крива Безьє другого порядку задається формулою [3]:

$$r = r_0(1-t)^2 + 2r_0(1-t)t + r_1 t^3 \tag{9}$$

Крива Безьє третього степеня задається формулою [3]:

$$r = r_0(1-t)^3 + 3r_1(1-t)^2 t + 3r_2(1-t)t^2 + r_{13}t^3 \quad (10)$$

Розкриємо дужки в формулах (9), (10).
Будемо мати:
Для кривої Безьє 2-го степеня:

$$r = r_0 + 2(r_1 - r_0)t + (r_1 - 2r_1 + r_2)t^2 \quad (11)$$

Для кривої Безьє 3-го степеня:

$$r = r_0 + 3(r_1 - r_0)t + (6r_1 - r_0)^2 + (r_3 r_0 + 3 - 3r_1)t^3 \quad (12)$$

похідна від (11) буде:

$$r' = 2(r_1 - r_0) \quad (13)$$

похідна від (12) буде:

$$r' = 3(r_1 - r_0) + 2(6r_1 - r_0)t + 3(r_3 - r_0 + 3r_2 - 3r_1)t^2 \quad (14)$$

Таким чином огинаюча на основі кривих Безьє 2-го і 3-го степенів визначаються формулами:

$$x = \frac{c' - c\dfrac{b}{b'}}{c_1\dfrac{b}{b'} - a_1}, \quad y = \frac{c' - c\dfrac{a}{a'}}{b\dfrac{a}{a'} - b'}, \quad (15)$$

Де:
Для кривих Безьє 2-го степеня буде:

$$a = a_0 + 2\left(a_1 - a_0\right)t + (a_0 - 2a_1 + a_2)t^2$$
$$a' = 2(a_1 - a_0)$$
$$b = b_0 + 2(b_1 - b_0)t + (b_0 - 2b_1 + b_2)t^2$$
$$b' = 2(b_1 - b_0)$$
$$c = c_0 + 2(c_1 - c_0)t + (c_0 + 2c_1 + c_2)t^2$$
$$c' = 2(c_1 - c_0).$$

Для кривої Безьє 3-го степеня буде:

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}_0 + 3(\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_0)\mathrm{t} + (6\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_0)\mathrm{t}^2 + (\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_0 + 3\mathrm{a}_2 - 3\mathrm{a}_1)\mathrm{t}^3$$
$$\mathrm{a}' = 3(\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_0)\mathrm{t} + 2(6\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_0)\mathrm{t} + 3(\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_0 + 3\mathrm{a}_2 - 3\mathrm{a}_1)\mathrm{t}^2$$
$$\mathrm{b} = \mathrm{b}_0 + 3(\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_0)\mathrm{t} + (6\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_0)\mathrm{t}^2 + (\mathrm{b}_3 + 3\mathrm{b}_2 - 3\mathrm{b}_1)\mathrm{t}^3$$
$$\mathrm{b}' = 3(\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_0) + 2(6\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_0)\mathrm{t} + 3(\mathrm{b}_3 + 3\mathrm{b}_2 - 3\mathrm{b}_1)\mathrm{t}^2$$
$$\mathrm{c} = \mathrm{c}_0 + 3(\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_0)\mathrm{t} + (6\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_0)\mathrm{t}^2 + (\mathrm{c}_3 - \mathrm{c}_0 + 3\mathrm{c}_2 - 3\mathrm{c}_1)\mathrm{t}^3$$
$$\mathrm{c}' = 3(\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_0)\mathrm{t} + 2(6\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_0)\mathrm{t} + 3(\mathrm{c}_3 + 3\mathrm{c}_2 - 3\mathrm{c}_1)\mathrm{t}^2.$$

В роботі розроблено комп'ютерну програму, робота якої представлена на рис. 1 і 2.

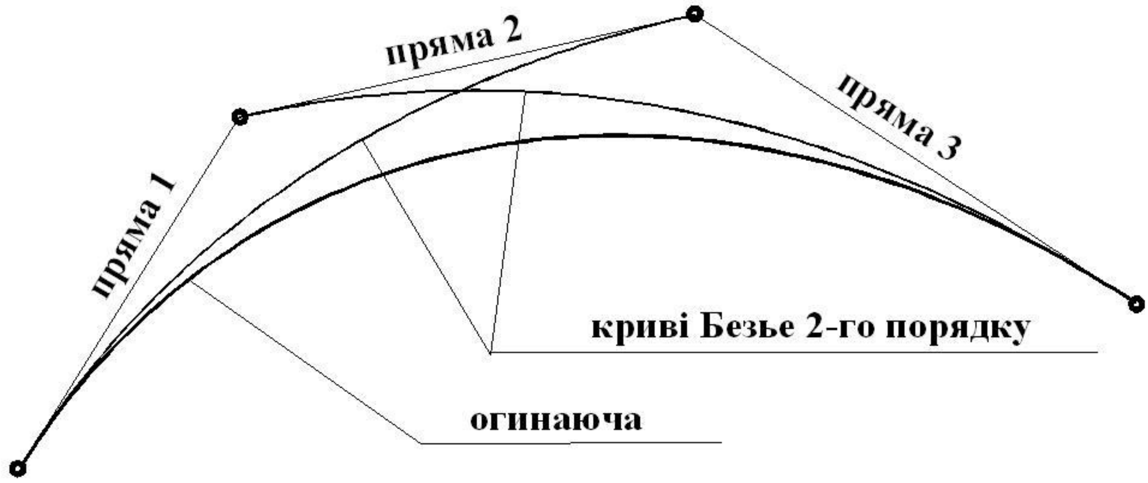

Рис. 1. **Огинаюча на основі двох кривих Безьє 2-го порядку**

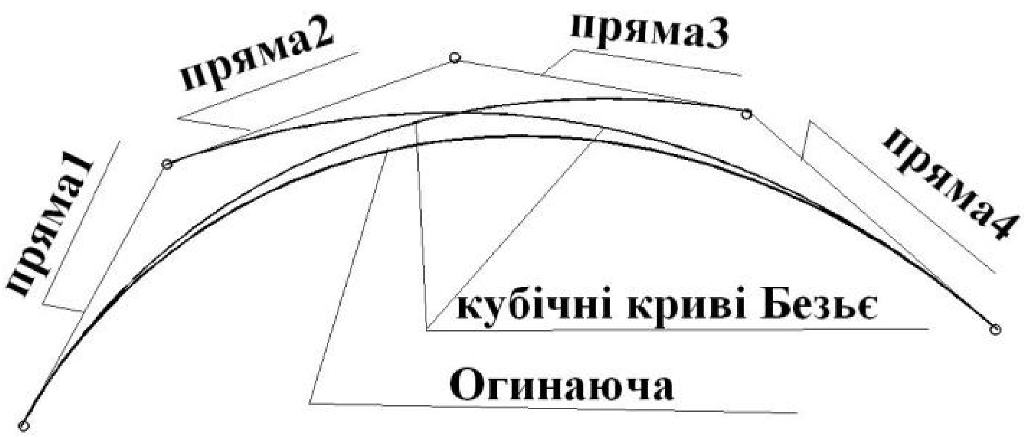

Рис. 2. **Огинаюча на основі двох кривих Безьє 3-го порядку**

Висновки. Таким чином, в статті пропонується новий метод проектування кривої, яка є огинаючою сім'ї відрізків прямих, визначених на основі NURBS-технології.

Подальші дослідження передбачається проводити щодо виявлення особливостей запропонованого методу.

1. Ефимов Н.В. "Высшая геометрия" – М.: Издательство "Наука" 1971-576с.
2. Фокс А. Пратт М. "Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве": Переведено с английского – М.: Издательство "Мир", 1982-304с.
3. Голованов Н.М. "Геометрическое моделирование" – М.: Издательство физико – математческой литературы; 2002 – 472с.
4. Гавриленко Є..А.Формування просторової дискретно-поданої кривої на основі прилягаючих кіл/ Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць/ МДПУ ім. Б.Хмельнтцького, 2014-Вип. 3, с.39-43.
5. Савченко О.О. Геометричне моделювання профілів морських хвиль на основі трохоїдальної моделі / Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць/ МДПУ ім. Б.Хмельнтцького, 2014-Вип. 3, с.78-87.
6. Аппроксимация методом Безье http://graphics.cs.msu.ru/grafor/gr_help/chapter_5_8.htm
7. Геометрическое сглаживание B-сплайнами http://www.codenet.ru/progr/alg/B-Splines/