

УДК 539.3

О.А. Мікуліч shypra@ukr.net

Луцький національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФРАКЦІЇ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У НЕСКІНЧЕННИХ ПЛАСТИНКАХ, ПОСЛАБЛЕНИХ ОТВОРАМИ РІЗНОЇ ФОРМИ

На основі розробленої методики розрахунку динамічної концентрації напружень біля отворів у нескінченних пластинках досліджено розподіл максимальних напружень у випадку, коли пластинка послаблена отворами різної форми. Для розв'язання задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь сумісно з апаратом теорії функцій комплексної змінної та методом механічних квадратур, що дало можливість розробити ефективний підхід для вивчення динамічного розподілу напружень у нескінченних пластинках практично довільної геометрії.

У багатьох галузях сучасного машинобудування для зменшення металомісткості та вартості конструкцій чи механізмів спостерігається широке застосування пластинчатих елементів складної форми, що зазнають впливу вібраційних навантажень. Це зумовлює необхідність розробки уточнених методик дослідження динамічного напруженого стану таких елементів конструкцій для оцінки їх надійності та довговічності.

Такі елементи конструкцій можна розглядати як необмежені пластинки складної геометрії, що послаблені отворами чи системами отворів. До них можна віднести моделі фюзеляжів літаків, корпусів суден та елементів облицювання автомобілів. Динамічна концентрація напружень біля отворів у таких пластинках залежить також від їх геометрії.

У працях О. М. Гузя, Г. М. Савіна, В. Д. Кубенка та ін. [3] для дослідження динамічного напруженого стану нескінченних пластинок з круговими та близькими до кругових отворів використовується методу рядів сумісно з методом збурення форми границі. У роботах Муна, Пао та ін. розв'язання такого класу задач проводиться методом багатократних відображень.

У працях П. Бенерджі, Р. Баттерфілда, К. Бреббія та ін. [2] розв'язання задач зведено до сингулярних та регулярних інтегральних рівнянь.

У [4] запропоновано методику вивчення динамічного напруженого стану багатозв'язних нескінченних пластинок за усталених коливань, що використовує метод граничних інтегральних рівнянь та апарат теорії функції комплексної змінної для випадку навантаження, прикладеного до границі отвору.

У цій роботі запропоновано у [4] методику розвинуто для випадку, що є динамічним аналогом задачі про концентрацію напружень біля отворів при двоосьовому основному напруженому стані. За усталених коливань він реалізується за допомогою плоскої пружної хвилі, що падає на отвір та породжує відбиті хвилі. Напружений стан у пружній пластинці визначає сумарне хвильове поле.

Розглянемо нескінченну пружну пластинку, що обмежена граничними контурами L, L_1, \dots, L_k (тут контур L охоплює решту контурів). Позначимо через D область, яку вона займає. Віднесемо пружну пластинку до декартової системи координат Ox_1x_2 . На контурі отвору виникають відбиті хвилі стиску, потенціали Ψ та Φ яких задовольняють рівнянням Гемгольца [1]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(t-w_1x_1)}, \quad \Psi = 0, \quad (*)$$

де $\Phi_0 = \frac{1}{m\omega^2}$, ω – частота, t – час, $w_1 = \frac{w}{c_1}$, $w_2 = \frac{w}{c_2}$, c_1, c_2 – швидкість хвиль розширення та зсуву:

$c_1^2 = E/(r(1-n^2))$, $c_2^2 = E/(2r(1+n))$, E – модуль пружності I роду, ρ – густина матеріалу, ν –

коефіцієнт Пуассона, μ — стала Ляме $\left(m = \frac{E}{2(1+n)} \right)$.

У випадку плоского напруженого стану використано потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень у вигляді [2]:

$$u_i = \int_L p_i U_{ij}^* ds \quad (1)$$

тут p_1, p_2 – комплексні невідомі потенціальні функції. Представлення для зображень U_{ij}^* вибрано з врахуванням умов Зоммерфельда у вигляді [2]:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2prc_2^2} (y d_{ij} - cr_j r_j),$$

причому

$$y = \frac{ip}{2} \left(-H_0^2 \left(\frac{wr}{c_2} \right) + \frac{c_2}{wr} \left(H_1^2 \left(\frac{wr}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} H_1^2 \left(\frac{wr}{c_1} \right) \right) \right),$$

$$c = \frac{ip}{2} \left(H_2^2 \left(\frac{wr}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} H_2^2 \left(\frac{wr}{c_1} \right) \right),$$

$r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$, $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$; $H_k^2(z) = J_k(z) - iY_k(z)$ – функції Ганкеля II роду; $J_k(z)$,

$Y_k(z)$ – відповідно функції Бесселя I та II роду, $i, j=1, 2$. Інтегрування по області та вздовж границі проводиться за змінними x_1^0, x_2^0 . Тут і далі біля переміщень та напружень опущений часовий множник $e^{i\omega t}$.

Для визначення напружень у довільній точці пластинки на площинці з нормаллю \hat{n} застосовано співвідношення [1, 2]:

$$2(s_n - it_{sn}) = \frac{2E}{1-n} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) + e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+n} \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right), \quad (2)$$

де α – кут між нормаллю до пластинки і віссю Ox_1 ; $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$.

Враховуючи, що функції U_{ij}^* , а тому і переміщення u_j , є комплексними, задачу про вивчення динамічної концентрації напружень біля отворів у багатозв'язних нескінченних пластинках зведено до дійсного виду:

$$u_j^R = \int_L (p_i^R U_{ij}^{*R} - p_i^I U_{ij}^{*I}) ds, \quad u_j^I = \int_L (p_i^I U_{ij}^{*R} + p_i^R U_{ij}^{*I}) ds, \quad (3)$$

тут $u_j^R = \operatorname{Re} u_j$, $u_j^I = \operatorname{Im} u_j$, $j=1, 2$; $p_i^R = \operatorname{Re} p_i$, $p_i^I = \operatorname{Im} p_i$, $i=1, 2$; $U_{ij}^{*R} = \operatorname{Re} U_{ij}^*$, $U_{ij}^{*I} = \operatorname{Im} U_{ij}^*$.

Підставляючи залежності (3) у формули (2) для визначення напружень, отримано:

$$2(s_n^R - it_{sn}^R) = \int_L f_1^R q^R dt + \int_L f_2^R \bar{q}^R dt - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I dt,$$

$$2(s_n^I - it_{sn}^I) = \int_L f_1^R q^I dt + \int_L f_1^R \bar{q}^I dt + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_1^I \bar{q}^R dt,$$

причому $f_i^R = f_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $f_i^I = f_i^I(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ є відомими функціями дійсного аргументу, що містять функції Бесселя II та I роду відповідно та мають вигляд, аналогічний до [5]; $q^R = i \times p^R \times ds/dt$, $q^I = i \times p^I \times ds/dt$ – невідомі функції.

Враховуючи нерегулярність підінтегральних функцій f_i^R , $i=1, 2$ при малих значеннях аргументу використаємо асимптотичні вирази для функцій Бесселя другого роду при малих значеннях аргументу [2] для встановлення їх особливостей. З врахуванням цього вирази для визначення напружень запишуться у вигляді:

$$2(s_n^R - it_{sn}^R) = \frac{1}{2pi} \frac{1+n}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z} - \bar{t}}{z - t} - 1 \right) \frac{1}{z - t} \right) q^R dt - \frac{1}{2pi} \int_L \left(-\frac{1+n}{2} \frac{1}{\bar{z} - \bar{t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-n}{2} \frac{1}{z - t} \right) \bar{q}^R d\bar{t} + \int_L G_1^R q^R dt + \int_L G_2^R \bar{q}^R d\bar{t} -$$

$$- \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I d\bar{t}; \quad (4)$$

$$2(S_n^I - it_{sn}^I) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1+n}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^I dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+n}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-n}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L G_1^R q^I dt + \int_L G_2^R \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_2^I \bar{q}^R d\bar{t}. \quad (5)$$

де $f_i^I, G_i^R = G_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ є функції дійсного аргументу, обмежені і неперервні скрізь в області D .

Здійсимо граничний перехід у співвідношеннях (4) та (5) при $(x_1, x_2) \rightarrow L$ використовуючи формули Племеля–Сохоцького [2, 3]. Отримаємо інтегральні рівняння для знаходження невідомих функцій q^R та q^I при заданих на границі навантаженнях:

$$\bar{q}^R + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+n}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^R dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+n}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-n}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^R d\bar{t} + \int_L G_1^R q^R dt + \int_L G_2^R \bar{q}^R d\bar{t} - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I d\bar{t} = 2S^R; \quad (6)$$

$$q^I + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+n}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^I dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+n}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-n}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L G_1^R q^I dt + \int_L G_2^R \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_2^I \bar{q}^R d\bar{t} = 2S^I, \quad (7)$$

тут перші два інтеграли є у розумінні головного значення; S^R, S^I – відомі функції.

Чисельне дослідження динамічного напруженого стану нескінченної пластинки з системою отворів, що утворюється вирізанням областей, які обмежені границями L_1 та L_2 , проводилося методом механічних квадратур та колокації.

Задамо параметризацію контурів у вигляді: $x_1^{(1)} = j_1(q); x_2^{(1)} = y_1(q), x_2^{(2)} = j_2(q); x_2^{(2)} = y_2(q), 0 < q < 2p$. Тоді на границі $t^{(1)} = j_1(q) + iy_1(q) = g_1(q), t^{(2)} = j_2(q) + iy_2(q) = g_2(q)$.

Для інтегралів, що мають особливість типу Коші, використаємо квадратурні формули виду [2]:

$$\int_{\Omega} \frac{q}{t-z_n} dt = h \sum_{n=1}^K q_n \frac{g'_n}{t_n - z_n}, \quad t_n = g(q_n), \quad g'_n = g'(q_n), \quad q_n = hn,$$

$$z_n = z(q_n^0), \quad q_n^0 = q_n + h/2, \quad n = \overline{1, K}, \quad q_n = q(t_n), \quad h = 2p / K,$$

а для решти інтегралів – наступні квадратурні співвідношення [2]:

$$\int_{\Omega} qf(t, z_n) dt = h \sum_{n=1}^K q_n f_{nn} g'_n,$$

де $f_{nn} = f(t_n, z_n)$.

Після застосування квадратурних формул, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для визначення невідомих $q_n^{R(1)} = q^{R(1)}(t_n), q_n^{R(2)} = q^{R(2)}(t_n), q_n^{I(1)} = q^{I(1)}(t_n), q_n^{I(2)} = q^{I(2)}(t_n)$:

$$\begin{aligned} \bar{q}_n^{I(2)} + h \sum_{n=1}^K f_{1nn}^{R(2,1)} q_n^{I(1)} g'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{2nn}^{R(2,1)} \bar{q}_n^{I(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1nn}^{I(2,1)} q_n^{R(1)} g'_{1n} + \\ + h \sum_{n=1}^K f_{2nn}^{I(2,1)} \bar{q}_n^{R(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1nn}^{R(2,2)} q_n^{I(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2nn}^{R(2,2)} \bar{q}_n^{I(2)} \bar{g}'_{2n} + \\ + h \sum_{n=1}^K f_{1nn}^{I(2,2)} q_n^{R(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2nn}^{I(2,2)} \bar{q}_n^{R(2)} \bar{g}'_{2n} = 2S_n^{I(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{q}_n^{I(1)} + h \sum_{n=1}^K f_{1n}^{R(1,1)} q_n^{I(1)} g'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{2n}^{R(1,1)} \bar{q}_n^{I(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1n}^{I(1,1)} q_n^{R(1)} g'_{1n} + \\ & + h \sum_{n=1}^K f_{2n}^{I(1,1)} \bar{q}_n^{R(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1n}^{R(1,2)} q_n^{I(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2n}^{R(1,2)} \bar{q}_n^{I(2)} \bar{g}'_{2n} + \\ & + h \sum_{n=1}^K f_{1n}^{I(1,2)} q_n^{R(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2n}^{I(1,2)} \bar{q}_n^{R(2)} \bar{g}'_{2n} = 2S_n^{I(1)}, \end{aligned}$$

де $f_{jn}^{R(m,k)} = f_j(x_{1n}^{(m)}, x_{1n}^{(m)}, x_{1n}^{0(k)}, x_{1n}^{0(k)})$, $f_{jn}^{I(m,k)} = f_j(x_{1n}^{(m)}, x_{1n}^{(m)}, x_{1n}^{0(k)}, x_{1n}^{0(k)})$, $g'_{jn} = g'_j(q_n)$, $z_n^{(m)} = x_{1n}^{(m)} + ix_{2n}^{(m)}$, $t_n^{(k)} = x_{1n}^{0(k)} + ix_{2n}^{0(k)}$, $z_n^{(m)} \in L_m$, $t_n^{(k)} \in L_k$, $q_n^{(j)} = q^{(j)}(z_n)$, $j, m, k = 1, 2$.

Визначивши невідомі з СЛАР напруження на границях отворів пластинки розраховуються на основі відомих формул [2], виділивши при цьому особливості типу Коші та здійснивши граничний перехід.

Використовуючи запропоновану методику вивчимо питання динамічного розподілу напружень у нескінченних пластинках від дії падаючої хвилі стиску, що задається потенціалами (*). Розглянемо задачу про дифракцію пружних хвиль на системі кругових отворів радіусу R , центри яких розміщені на осі Ox_1 (відстань між центрами становить $\delta = 2,5R, 3R, 4R$; $w\zeta = w\zeta/R$) (рис. 1). Розрахунки проводилися при 100 точках розбиття границі. Тут суцільні криві описують розподіл максимальних динамічних напружень на границі лівого отвору, пунктирні — правого. Для порівняння також наведено результати розрахунку для випадку, коли пластинка послаблена одним круговим отвором [3]: на рис. 1 цьому випадку відповідає штих-пунктирна крива.

Тут і надалі розрахунки проводилися для значення коефіцієнту Пуассона 0,3.

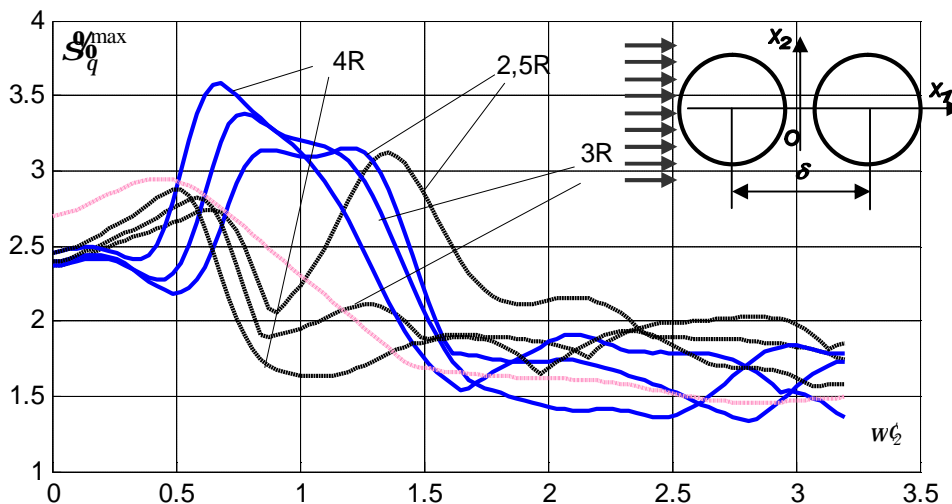


Рис. 1. Дифракція пружних хвиль стиску на системі послідовно розміщених кругових отворів

Розрахунки показують, що розподіл максимальних динамічних напружень на отворах має складний коливний характер. При малих частотах $w\zeta \in (0; 0,6)$ динамічні напруження на границі отворів є меншими у порівнянні з випадком, коли пластинка послаблена одним отвором. Проте значене зростання динамічної концентрації напружень спостерігається в діапазоні частот $w\zeta \in (0,6; 1,5)$. При $w\zeta > 1,6$ динамічні напруження на обох отворах менші статичних. Збільшення відстані між отворами зумовлює зменшення впливу відбитих від границі лівого отвору хвиль на правому отворі.

Дослідимо дію падаючої хвилі стиску на систему послідовно розміщених отворів різної форми. На рис. 2-3 наведено залежність максимальних динамічних напружень від зведеної частоти для випадку, коли пластинка послаблена круговим з радіусом R та квадратним з діаметром R отворами, відстань між центрами яких $\delta = 3R, 5R$. Тут суцільними лініями показано розподіл максимальних динамічних напружень на границі лівого отвору, пунктирними — правого.

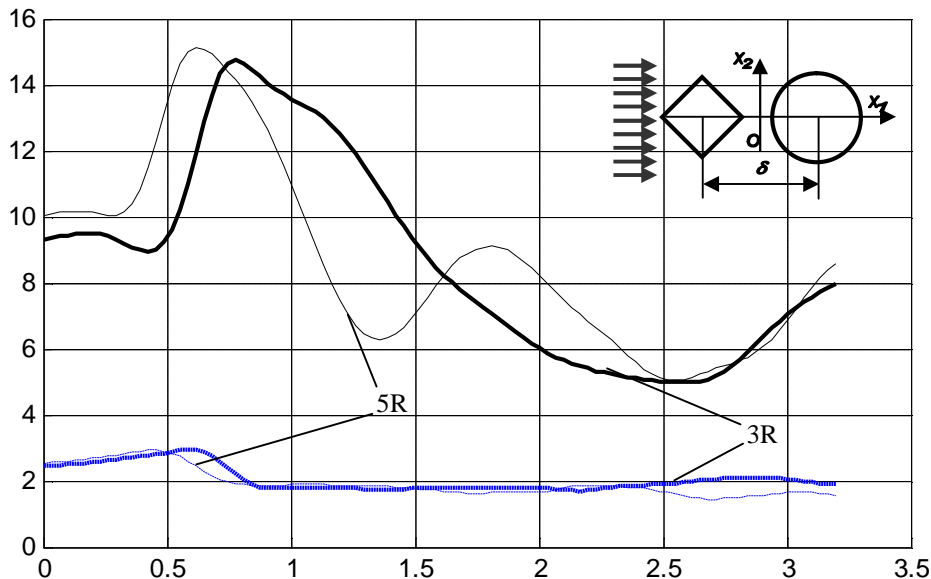


Рис. 2. Розподіл максимальних динамічних напружень на отворах різних форм

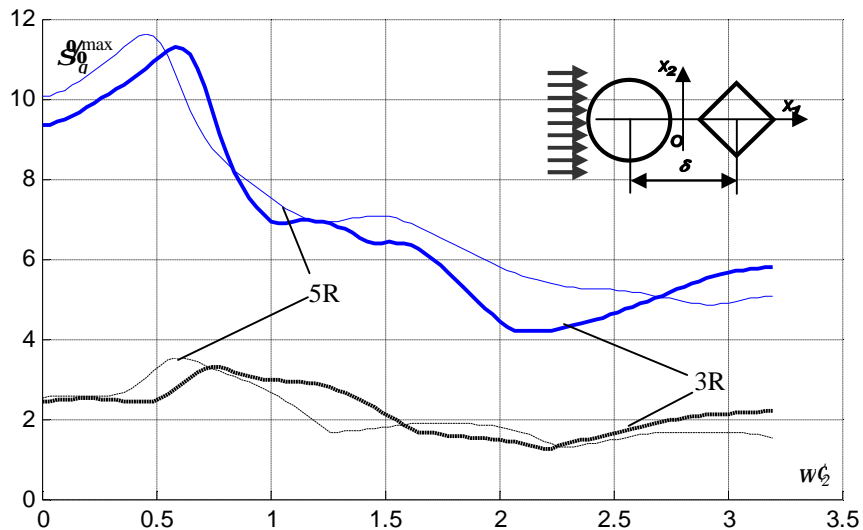


Рис. 3. Динамічна концентрація напружень біля отворів різних форм

З рис. 2-3 видно, що для випадку, коли пластинка послаблена отворами різної форми максимальні динамічні напруження на круговому отворі мають незначний коливний характер, тому відбиття хвиль від квадратного отвору не зумовлює значного зростання динамічних напружень. Для квадратного отвору при $w\xi > 1..1,5$ максимальні динамічні напруження є меншими статичних; також не спостерігається істотного зростання динамічної концентрації напружень при збільшенні частоти.

Висновки. У роботі на основі запропонованого алгоритму дослідження дифракції пружних хвиль у пластинках, що послаблені системами отворів вивчено розподіл динамічної концентрації напружень у пластинці, що послаблена системою отворів різної форми. Порівняння проведених розрахунків для пластинок з системою отворів однакової та різної форми вказують на те, що у пластинках з отворами різної форми не спостерігається значного зростання динамічних напружень за рахунок відбиття хвиль від границь отворів.

1. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. — Л.: Світ, 1994. — 560с.
2. Бреббія К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ. / Под. ред. Григолока Э.И. — М.: Мир, 1982. — 248 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн.— К.: Наук. думка, 1978. — 308 с.
4. О.А. Мікуліч Концентрація напружень у пластинці з двома отворами від дії осцилюючого тиску // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.— Дніпропетровськ, 2008, Вип. 9. — С. 138-148.