УДК 62.50

В.А. Крамарь, канд. техн. наук, доцент
Севастопольский национальный технический университет

# НЕСТРУКТУРИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ С МНОГОЧЛЕННЫМИ МАТРИЦАМИ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

*В роботі пропонується підхід до побудови передаточної матриці і характеристичного многочлена неструктурованої безперервної багатовимірної системи автоматичного управління на основі методики побудови найбільшого загального дільника багаточленних матриць. Отримана модель дозволяє проводити аналіз стійкості неструктурованої багатовимірної системи управління по розташуванню коренів побудованого характеристичного многочлена системи.*

*Багатовимірна система управління, стійкість, характеристичний многочлен, найбільший загальний дільник.*

## Введение.

Объектом исследования в настоящей работе являются линейные многомерные системы автоматического управления. Будем рассматривать модели систем в комплексной области (области изображений по Лапласу) с рациональными передаточными матрицами.

В настоящее время одной из основных целей работы с моделями многомерных систем автоматического управления заключается в развитии и совершенствовании математических методов построения характеристических многочленов многомерных систем и развития на этой основе методов параметрического анализа и синтеза систем и создания развитых программных средств их реализации на ЭВМ.

При решении указанных задач, рассматривается проблема кажущихся (устранимых) полюсов передаточных функций замкнутой системы. Основной подход в решении проблемы в современной теории многомерных систем основан на построении взаимно простых многочленных матриц, эквивалентных многочленным матрицам исходных представлений системы (представлений передаточных матриц в виде произведения прямой и обратной многочленных матриц).

Реализация этого подхода для построения характеристического многочлена системы автоматического управления прямым путем с помощью элементарных эквивалентных преобразований представляет собою чрезвычайно громоздкую процедуру. Поэтому значительное внимание в построении моделей многомерные системы автоматического управления уделяется формированию характеристического многочлена по многочленным матрицам прямых исходных представлений системы автоматического управления по их наибольшему общему делителю.

В результате достигается формирование элементов описания системы автоматического управления, позволяющих эффективно решать задачи анализа динамики непрерывной многомерной системы автоматического управления. Эти методы принципиально просто переносятся на однотактные цифровые многомерные системы автоматического управления.

## Модель системы

Будем рассматривать неструктурированную многомерную систему автоматического управления.

Пусть указанная система автоматического управления задана следующим вход – выходным соотношением в области изображений Лапласа

$$y(s) = \Phi(s)u(s). \tag{1}$$

Предполагаем, что векторы изображения входа и выхода системы управления - $y(s)$ и $u(s)$ имеют одинаковые размерности. $\Phi(s)$ - передаточная матрица системы

$$\Phi(s) = \{\varphi_{ij}(s)\},\ i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Элементы передаточной матрицы системы $\varphi_{ij}(s)$ заданы в виде дробно – рациональных функций

$$j_{ij}(s) = \frac{p_{ij}(s)}{q_{ij}(s)}, \tag{3}$$

где $p_{ij}(s), q_{ij}(s)$ - взаимно простые многочлены, т.е. наибольший общий делитель (НОД) указанных многочленов равен единице.

$$\text{НОД}\{p_{ij}(s), q_{ij}(s)\} = 1. \tag{4}$$

Другими словами, множество корней рассматриваемых многочленов строго разные. Т.е., если $\lambda$ - некоторый комплексный корень одного многочлена, то он не является корнем другого рассматриваемого многочлена.

Пусть имеем многочлен $q_i(s)$ который является общим кратным (ОК) указанных ниже многочленов

$$q_i(s) = \text{ОК} q_{i1}(s), q_{i2}(s), \ldots, q_{in}(s), \tag{5}$$

т.е.

$$q_i(s) = c_{ij}(s) q_{ij}(s), \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Значит, $i$ - ая строка передаточной матрицы $\Phi(s)$ имеет вид

$$\varphi_{ij}(s) = \frac{c_{ij}(s) p_{ij}(s)}{q_i(s)} = \frac{\pi_{ij}(s)}{q_i(s)}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

где элементы $\pi_{ij}(s)$ представляются в виде

$$\pi_{ij}(s) = c_{ij}(s) p_{ij}(s), \quad i, j \in \{1,\ldots n\}. \tag{8}$$

Зададим матрицы $Q(s)$ и $\Pi(s)$ в виде

$$Q(s) = \begin{bmatrix} q_1(s) & & & 0 \\ & q_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_n(s) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\Pi(s) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(s) & \pi_{12}(s) & \ldots & \pi_{1n}(s) \\ \pi_{21}(s) & \pi_{22}(s) & \ldots & \pi_{2n}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi_{n1}(s) & \pi_{n2}(s) & \ldots & \pi_{nn}(s) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Тогда, матрица передаточных функций рассматриваемой системы будет иметь вид

$$\Phi(s) = Q^{-1}(s) \Pi(s). \tag{11}$$

Соотношение (11) можно принять как общую математическую модель рассматриваемой неструктурированной многомерной системы автоматического управления.

Практическая реализация указанной модели состоит в возможности построения характеристического многочлена рассматриваемой системы, который в дальнейшем может быть использован для анализа устойчивости.

Пусть матрицы в модели (11) могут быть представлены в виде

$$Q(s) = C(s) \hat{Q}(s); \tag{12}$$

$$\Pi(s) = C(s) \hat{\Pi}(s) \tag{13}$$

Многочленная матрица $C(s)$ является левым наибольшим общим многочленным делителем (если он существует) матриц $Q(s)$ и $\Pi(s)$, определяемая с точностью до правого унимодулярного множителя $\theta(s)$, такого, что если $C(s)$ левый наибольший общий делитель, то матрица

$$\overline{C}(s) = C(s) \cdot \theta(s) \tag{14}$$

также является левым наибольшим общим делителем.

Таким образом, $\hat{Q}(s)$ и $\hat{\Pi}(s)$ являются взаимно простыми, т.е. их наибольший общий делитель является унимодулярной матрицей.

Отметим, что указанные матрицы взаимно просты, если и только если инвариантные многочлены составной матрицы $[\hat{Q}(s)\vdots\hat{\Pi}(s)]$ все нулевой степени. Также отметим, что указанные матрицы $\hat{Q}(s)$ и $\hat{\Pi}(s)$ взаимно просты если и только если наибольший общий делитель всех миноров $n$-го порядка составной матрицы $[\hat{Q}(s)\vdots\hat{\Pi}(s)]$ - нулевой степени.

Теорема 1. Характеристический многочлен рассматриваемой системы определяется соотношением

$$q(s) = \det\hat{Q}(s)\,. \tag{15}$$

Доказательство. По определению, в соответствии, с соотношениями (11), (12) и свойством матричного умножения

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

имеем

$$\Phi(s) = \hat{Q}^{-1}(s)C^{-1}(s)C(s)\hat{\Pi}(s)\,. \tag{16}$$

$$\Phi(s) = \hat{Q}^{-1}(s)\hat{\Pi}(s)\,. \tag{17}$$

Таким образом, получаем представления передаточной матрицы системы

$$\Phi(s) = \frac{1}{\det\hat{Q}(s)}\mathrm{Adj}\hat{Q}(s)\cdot\hat{\Pi}(s)\,. \tag{18}$$

Построение взаимно простых многочленных матриц $\hat{Q}(s),\ \hat{\Pi}(s)$ с помощью элементарных операций над матрицами $Q(s), \Pi(s)$ выполняется следующим образом.

Рассмотрим способ построения левого наибольшего общего делителя матриц $Q(s),\ \Pi(s)$.

Введем с этой целью в рассмотрение составную $n\times 2n$ - матрицу

$$L(s) = \left[Q(s)\vdots\Pi(s)\right]. \tag{19}$$

Пусть ранг матрицы $L(s)$ равен $r$. И пусть согласно теореме об эквивалентных матрицах левыми и правыми элементарными операциями (над строками и столбцами) матрица $L(s)$ преобразована в эквивалентную каноническую диагональную $n\times 2n$ - матрицу

$$\begin{bmatrix} i_r(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & i_{r-1}(\lambda) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & i_1(\lambda) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \left[J_r\vdots 0_n\right], \tag{20}$$

где $i_k(s), k = 1,\ldots r$ - инвариантные делители матрицы $L(s)$,

$$J_r = \mathrm{diag}(i_r, i_{r-1},\ldots, i_1, 0,\ldots,0)$$

- $n\times n$ - матрица, $0_n$ - $n\times n$ - нулевая матрица.

Пусть имеет место равенство

$$L(s) = \tau(s)\left[J_r\vdots 0_n\right]\theta(s)\,, \tag{21}$$

где $\tau(s)$ - унимодулярная $n\times n$ матрица, а $\theta(s)$ - унимодулярная $2n\times 2n$ матрица $(\det\tau(s) = \mathrm{const} \neq 0,\ \ \det\theta(s) = \mathrm{const} \neq 0)$, определяемые эквивалентными преобразованиями. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Левый наибольший общий делитель многочленных матриц $Q(s), \Pi(s)$ допускает представление

$$C(s) = \tau(s)J_r(s)\,. \tag{22}$$

Доказательство. Представим многочленную унимодулярную матрицу $\theta(s)$ в блочном виде

$$\theta(s)=\left[\begin{array}{c:c} R(s) & T(s) \\ \hdashline U(s) & V(s) \end{array}\right] \qquad (23)$$

с блоками размерности $n\times n$. Представим также в блочном виде многочленную и унимодулярную обратную матрицу $\theta^{-1}(s)$

$$\theta^{-1}(s)=\left[\begin{array}{c:c} K(s) & G(s) \\ \hdashline N(s) & H(s) \end{array}\right]. \qquad (24)$$

В силу соотношения

$$\theta(s)\theta^{-1}(s)=I_{2n} \qquad (25)$$

для блоков этих матриц имеют место соотношения, определяемые равенством

$$\left[\begin{array}{c:c} R(s)K(s)+T(s)N(s) & R(s)G(s)+T(s)H(s) \\ \hdashline U(s)K(s)+V(s)N(s) & U(s)G(s)+V(s)H(s) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} I_n & 0 \\ \hdashline 0 & I_n \end{array}\right], \qquad (26)$$

в частности, соотношение

$$R(s)K(s)+T(s)N(s)=I_n\,. \qquad (27)$$

С помощью полученных соотношений покажем, что матрица (22) является левым наибольшим общим делителем многочленов $Q(s),\ \Pi(s)$.

Действительно, используя блочное представление матрицы $\theta(s)$, равенство (21) можно записать в виде

$$[Q(s) \vdots P(s)]=[\tau(s)J_r(s)R(s) \vdots \tau(s)J_r(s)T(s)], \qquad (28)$$

откуда следуют равенства

$$Q(s)=t\,(s)J_r(s)R(s)=C(s)R(s), \qquad (29)$$

$$P(s)=\tau(s)J_r(s)T(s)=C(s)T(s)\,.$$

Значит, матрица (22) – левый общий делитель матриц $Q(s),\ \Pi(s)$. Пусть $C'(s)$ - какой - либо другой общий делитель. Тогда, имеют место соотношения

$$Q(s)=C'(s)R'(s), \qquad (30)$$

$$\Pi(s)=C'(s)T'(s), \qquad (31)$$

где $R'(s)$, $T'(s)$ - многочленные матрицы. Вместе с тем, умножая равенство (27) слева на $C(s)$ и используя соотношения (22), будем иметь

$$Q(s)K(s)+P(s)N(s)=C(s), \qquad (31)$$

или в силу соотношений (29), (30)

$$C'(s)[R'(s)K(s)+T'(s)N(s)]=C(s)\,. \qquad (32)$$

В квадратных скобках многочленная матрица, значит $C'(s)$ - делитель матрицы $C(s)$, т.е. последняя – наибольший общий делитель матриц $Q(s),\ \Pi(s)$. Теорема доказана.

Выводы.

Предложенный в настоящей статье подход позволяет получить математическую модель неструктурированной многомерной системы автоматического управления пригодную для анализа устойчивости системы по расположению корней построенного характеристического многочлена системы.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц/ Ф.Р. Гантмахер.- М.:Наука,1977.-576с.

2. Doyle, J.C. Feedback Control Theory/ J.C. Doyle, B. Francis and A. Tannenbaum.- Macmillan Publishing Company, New York, 1992.- 673p.

3. Gasparjan O.N. Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach/ O.N. Gasparjan.- John Wiley & Sons, 2008.- 341p.

4. Alan Jeffrey Matrix Operations for Engineers and Scientists/ A. Jeffrey.- Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2010.-327p.

Фалалеев А.П. проректор Севастопольского национального технического университета. к.т.н., доцент