

УДК 539.3

О.В. Гуда, В.М.Тимошук

Луцький національний технічний університет

## МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ПЛАСТИН, ПОШКОДЖЕНИХ ТРІЩИНАМИ

**Гуда О.В., Тимошук В.М. Методика розрахунку пластин, пошкоджених тріщинами.** У даній роботі на основі рівнянь руху, які враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення, запропоновано методику розрахунку пластин, пошкоджених тріщинами. Отримані зручні для інженерного використання аналітичні залежності для обчислення напружень та переміщень у ізотропних і транверсально-ізотропних пластинах, пошкоджених горизонтальною тріщиною.

**Ключові слова:** ізотропні та транстропні пластини, поперечний зсув, поперечне обтиснення, згинальні моменти, поперечні сили, прогин, напруження, тріщина.

Форм. 15. Табл. 3. Рис. 2. Літ. 9.

**Гуда О.В., Тимошук В.М. Методика расчета пластин, поврежденных трещинами.** В данной работе с помощью уравнений движения, которые учитывают деформации поперечного сдвига и обжатия, предложена методика расчета пластин, поврежденных трещинами. Получены удобные для инженерного использования аналитические зависимости для вычисления напряжений и перемещений в изотропных и транстропных пластинах, поврежденных горизонтальной трещиной.

**Ключевые слова:** изотропные и транстропные пластины, поперечный сдвиг, поперечное обжатие, сгибальные моменты, поперечные силы, изгиб, напряжение, трещина.

**Guda O.V., Tymoshchuk V.M. The methods of calculating the plates, which are damaged by cracks.** In this work, based on the equations of motion, which take into account the deformations of transverse shear and compression, the methods of calculating the plates, which are damaged by cracks, were proposed. For engineering use the convenient analytical dependences for calculation of stresses and displacements in isotropic plates, which are damaged by horizontal crack, were obtained.

**Key words:** isotropic and transtropic plates, transverse shear, transverse compression, bending moments, transverse forces, deflection, stress, crack.

**Постановка проблеми.** Проблема розрахунку тонких пластин, послаблених тріщинами, є особливо актуальною для випадків композитних матеріалів, що мають схильність до розшарувань у суцільному середовищі, між шарами, або в околі армувальних елементів. Хоча поширення тріщини паралельно до серединної поверхні пластини є менш небезпечним, ніж коли це поширення відбувається перпендикулярно, проблема розрахунку такого елемента залишається актуальною.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Аналіз цієї проблеми наведено у монографіях В.В.Панасюка, М.П.Саврука, О.П.Дацишин [4], М.В.Марчука, М.М.Хом'яка [3], С.В.Серенсена, Г.П.Зайцева [5], Г.П.Черепанова [7] та ін. Деякі задачі для крайових тріщин розв'язані числовими методами і з ними можна познайомитися у відомому довіднику під ред. Ю.Мураками [6]. У роботах В.Ц. Гнуні та Т.А. Єгіазаряна [1] задачі стійкості та згину тонких пластин із внутрішніми тріщинами розглядаються у постанові класичної теорії згину. В даній роботі розв'язана задача циліндричного та осесиметричного згину плити із внутрішньою тріщиною на базі рівнянь уточненої теорії згину плит середньої товщини [8]. Досліджується вплив поперечної анізотропії та довжини тріщини на величини напружень і переміщень у плиті.

**Метою дослідження** є побудова методики розрахунку пластин, пошкоджених тріщинами, що враховує як ефекти поперечного зсуву, так і деформацію поперечного обтиснення.

**Основні результати дослідження. 1.** Розглядається циліндричний згин плити товщиною  $2h$ , що шарнірно оперта на краях  $x = \pm a$ , а на глибині  $z = h - h_0$  (у межах  $-l \leq x \leq l$ ) вона послаблена симетричною поздовжньою тріщиною, що знаходиться паралельно до серединної поверхні (рис.1). Плита згинається сталим розподіленням навантаженням  $q$ , що прикладене до зовнішньої поверхні  $z = -h$ .

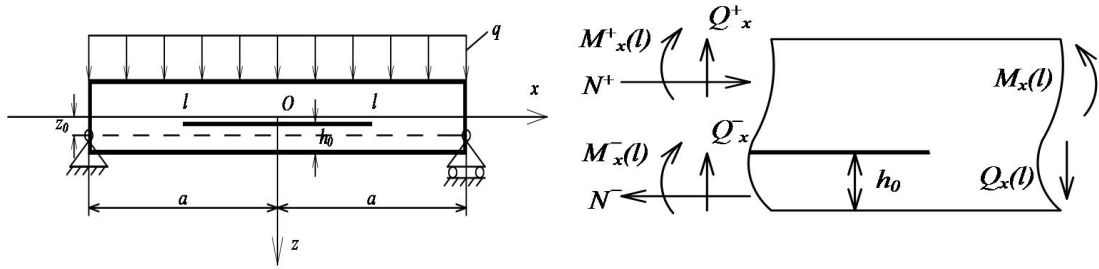


Рис. 1. Схема навантаження плити при циліндричному згині  
 Авторська розробка

Загальну згинальну жорсткість розділяємо для плити в області тріщини на верхню та нижню:

$$D_1 = D_1^- + D_1^+ = \delta D, \quad (\delta = 1 - 3\beta + 3\beta^2, \quad \beta = h_0/2h), \quad (1)$$

$$D_1^+ = E(2h - h_0)^3 / 12 = (1 - \beta)^3 D, \quad D_1^- = \beta^3 D.$$

А жорсткість для суцільної ділянки пластини шукаємо в вигляді:

$$D_2 = D = 2Eh^3/3.$$

Контактні напруження, що виникають на берегах тріщини, вважаємо сталими

$$p = \frac{qD_1^-}{D_1^+ + D_1^-} = q\beta^3 / \delta, \quad \text{що майже підтверджується числовим експериментом, за виключенням}$$

тих ділянок, де виникають осцилюючі напруження. Для визначення напружено-деформованого стану плити використовуються рівняння уточненої моделі трансропних (трансверсально-ізотропних) плит, що враховують, крім деформації поперечного зсуву, ще й поперечне обтиснення, на що вказують додаткові коефіцієнти, та додаткові функції зсуву і переміщення плоскої задачі теорії пружності:

$$\begin{aligned} D_i w_i^{IV} &= q_{i2} - \varepsilon_1 h_i^2 q_{i2}'' - \varepsilon_2 h_i^4 q_{i2}^{IV}; \quad K_i' w_{i\tau}'' = -q_{i2}; \quad E u_i'' = -\nu''(1-\nu) q_{i1}', \\ D_i &= D = E I^k; \quad I = 2h^3/3; \quad K' = 4G'h/3; \quad q_{i2} = q^-; \quad q_{i1} = -0,5q^-; \quad u_i, w_i, w_{i\tau}, h_i = u, w, w_\tau, h \\ q_{i2} &= q_{e2} = q^- + \sigma_z(h - h_0) \equiv q^- - p = q(1 - \beta^3)/(1 - 3\beta + 3\beta^2) \\ q_{i1} &= q_{e1} = (\sigma_z(h - h_0) - q^-) / 2 = -(p + q^+) / 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Розв'язки задачі записуємо окремо для ділянки з тріщиною та для ділянки без тріщини. За допомогою граничних умов на межі ділянок пластини з тріщиною, де їх умовно зшиваємо, тобто вимагаємо, щоб переміщення, згинальні моменти, поздовжні сили дорівнювали нулю, а для ділянки з тріщиною – рівні між собою, знаходимо максимальні переміщення з урахуванням поперечного зсуву та обтиснення:

$$w_n = \frac{5qa^4}{24D} \left[ 1 + 3\theta^4 + 0,3(\theta^2 - A'(1 - \theta^2)) \frac{h^2}{a^2} + 2,4\varepsilon_1(1 - 0,25A'h^2/a^2) \frac{h^2}{a^2} \right] - \frac{\alpha_0 q h^6}{16E'}. \quad (3)$$

А також, після нехтування коефіцієнтами, що враховують поперечний зсув та обтиснення, отримаємо формулу для переміщення в класичній постановці:

$$w_n = \frac{5qa^4}{24D} (1 + 3\theta^4). \quad (4)$$

У (4)  $\theta$  – відносна довжина тріщини. Якщо  $\theta = 0$  – відома формула для суцільної пластини,  $\theta = 1$  – тріщина ділить плиту на дві частини, згин двох плит і переміщення збільшується в 4 рази. Цю задачу в класичній постановці розв'язав Тимошенко, але до формули такого виду не звів. Дана формула (4) є простою і її можна ввести в навчальні посібники для студентів при розрахунку суцільних плит та плит з тріщинами.

Формули для визначення напружень, що виникають у плиті над тріщиною і під тріщиною та на берегах тріщини:

$$\sigma_x(0, \pm h) = \pm \frac{3 a^2}{4 h^2} (1 + \theta^2) q \pm \frac{1}{5} \frac{(G/G' - \nu'')}{(1 - \nu)} q; \quad (5)$$

$$\sigma_x(0, m0) = m \frac{3 a^2}{2 h^2} \theta^2 q m \frac{1}{4} \frac{(G/G' - \nu'')}{(1 - \nu)} q.$$

Додаткові члени (5) враховують поперечний зсув та обтиснення для різних модулів зсуву та коефіцієнта Пуассона. У випадку товстих плит цей доданок дає значний вплив. Для ізотропних пластин можна отримати прості формули, якщо цим членом знехтувати.

Дана задача порахована МГЕ, що підтверджує отримані результати. Для плит без тріщини результати співпадають.

Отримали числові результати для верхньої та нижньої частини плити над тріщиною і під тріщиною (рис.2).

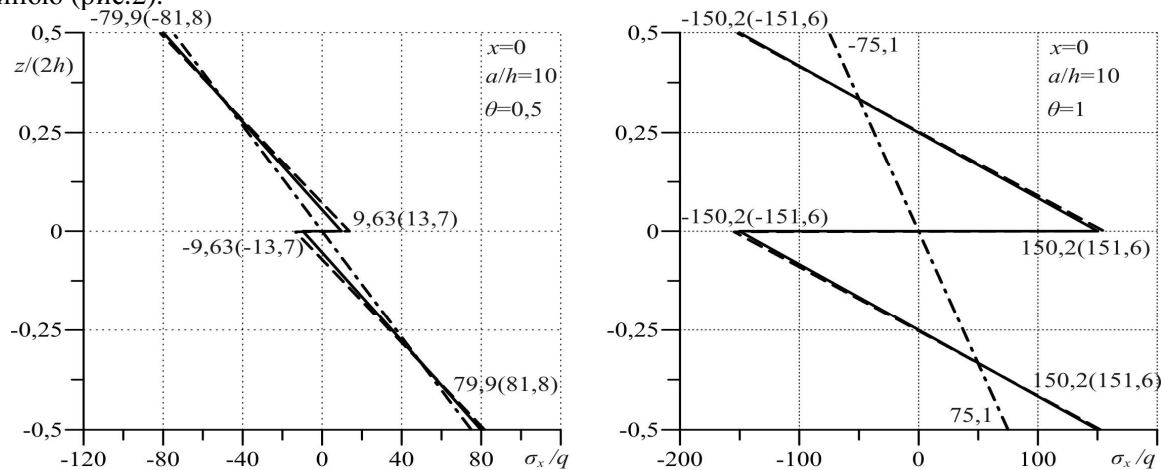


Рис. 2. Графіки зміни напружень  $\sigma_x / q$  за поперечною координатою  $z / 2h$

Авторська розробка

Штрих-пунктирною лінією зображено випадок без тріщини, пунктиром – пораховані результати за допомогою МГЕ. Перший рисунок відповідає випадку, коли тріщина займає половину довжини плити ( $\theta = 0,5$ ), другий – плита повністю розділена тріщиною ( $\theta = 1$ ) (тут для випадку суцільної плити результат відрізняється).

У таблицях 1,2 показано як змінюється напруження в залежності від довжини тріщини в ізотропній плиті (таб.1) та дерев'яній (таб.2), в дужках результати пораховані МГЕ.

Таблиця 1. Значення напружень у ізотропній плиті

Авторська розробка

$\frac{a}{h}$	$\sigma_x / q$ (ізотропія)		
	$\theta = 0$	$\theta = 0,5$	$\theta = 1$
5	18,95 (18,86)	23,64 (20,60)	20,12 (37,7 (38,3))
10	75,20 (75,10)	93,95 (81,78)	79,89 (150,2 (151,6))
20	300,2 (300,8)	375,2 (326,7)	308,9 (600,2 (604,7))

Таблиця 2. Значення напружень у трансропній плиті

Авторська розробка

$\frac{a}{h}$	$\sigma_x / q$ (деревина)		
	$\theta = 0$	$\theta = 0,5$	$\theta = 1$

5	21,52 (21,23)	22,69 (22,80)	40,27 (38,72)
10	77,77 (77,79)	82,46 (84,64)	152,8 (152,3)
20	302,8 (304,3)	321,52 (331,4)	602,8 (605,9)

Більш ефективними будуть формули напружень, якщо взяти не  $\theta^2$ , а  $\theta^4$ .

2. Розглянемо осесиметричний згин круглої транстропної плити. Кругла пластина, радіусом  $R$  із товщиною  $2h$ , навантажена розподіленням по поверхні  $z = -h$  тиском  $q$ . На віддалі  $h_0 \in [0; h]$  від нижньої поверхні пластина має монетоподібну тріщину радіуса  $l \in [0, R]$ , що знаходиться паралельно до серединної поверхні. Аналогічно, в області, де виникла тріщина, циліндричну жорсткість можна подати як алгебраїчну суму жорсткостей «пакету» верхнього і нижнього елементів пластини, де немає тріщини – як циліндричну жорсткість суцільної пластини. Використано рівняння згину уточненої теорії для транстропних плит:

$$D_i \Delta^2 w_i = q_{i2} - \varepsilon_1 h_i^2 \Delta^2 q_{i2} - \varepsilon_2 h_i^4 \Delta^2 q_{i2}; K' \Delta w_\tau = -q_2. \quad (6)$$

Знайдені загальні формули для напружень:

$$\sigma_r = \frac{N_r}{2h} + \frac{M_r}{I} z + \frac{zG^*}{3I} (z^2 - 0,6h^2) \left( q_2 - \Lambda q_2 h^2 \frac{G'}{E'} \right), \quad (7)$$

які відрізняються від класичної теорії членами, що враховують поперечний зсув і обтіснення, нелінійні по поперечній координаті. У вертикальних переміщеннях (8) враховано функцію зсуву, вони змінюються по координаті  $z$  до четвертого степеня. Аналогічно записані розв'язки (9) та граничні умови (10) та умови зшивання (11), де вважалось, що переміщення в області з тріщиною дорівнює переміщенню на ділянці суцільної плити, внизу чи зверху нормальні напруження на межі тріщини однакові, поздовжня сила, що виникає в верхній чи нижній частині плити над тріщиною, співпадає з поздовжньою силою, що виникає в суцільній плиті.

$$U(r, z) = u(r) - z \left( \frac{dw}{dr} - \frac{dw_\tau}{dr} \left( 1 - (1 - \nu^*) \frac{z^2}{3h^2} \right) \right) - \frac{(1 - \nu^*)}{8E'h} \frac{dq_2}{dr} z^3; \quad (8)$$

$$W(r, z) = w(r) + 2\alpha_0 z \cdot \frac{q_1}{E'} + A' \cdot \frac{z^2}{2} \Delta w + \frac{\alpha_0 \cdot q_2}{8E'h} \cdot B(z).$$

$$w_i = A_i r^2 + B_i r^2 \ln \frac{r}{R} + C_i \ln \frac{r}{R} + K_i + \frac{q_{i2} r^4}{64D_i}, \quad (i=1, 2) \quad (9)$$

$$w_\tau^{(i)} = A_\tau^{(i)} + B_\tau^{(i)} \ln \frac{r}{R} - q_{i2} r^2 / 4K_i', \quad u_i = F_i r + L_i r^{-1} + u_i^*.$$

$$w_2(R) = 0, \quad w_\tau(R) = 0, \quad M_{r2}(R) = 0, \quad N_{r2}(R) = 0 \quad (10)$$

$$w_1^-(l) = W(l, h(1 - \beta)); \quad \sigma_r^-(l, \beta h) = \sigma_r(l, h); \quad (11)$$

$$N_r^-(l) = \int_{h-h_0}^h \sigma_r(l, z) dz.$$

Отримали вирази для максимальних напружень (12) і переміщень (13):

$$\sigma_{r1}^-(0, \pm h_0/2) = \frac{N_{r1}^-(l)}{2\beta h} \pm \frac{3M_{r1}^-(0)}{2\beta^2 h^2} \pm 0, 2G^* p, \quad (12)$$

$$w_1^-(0) = w_{кл.} \left[ 1 + 3\theta^4 - \theta^2 \left( \theta^2 - 2\theta^4 \frac{1+\nu}{3+\nu} \right) + \frac{16}{5+\nu} [2\varepsilon_0(1 + \theta^2(1-t)) + \theta^2 G^* / 3] \frac{h^2}{R^2} \right] - B^c. \quad (13)$$

Для випадку  $\theta = 1, \beta = 0,5$ , коли тріщина ділить плиту на дві рівних половини, одержимо максимальні напруження на зовнішніх поверхнях точок центральної осі плити –  $\sigma_r(0, \pm h)$  та

максимальні напруження на поверхнях тріщини в середині плити «над» і «під» тріщиною –  $\sigma_{r1}(0, m0)$ , а також максимальні переміщення  $w_1^-(0)$  у вигляді наступних формул:

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \pm h) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2}{16h^2} \pm 0,2G^*q; \\ \sigma_{r1}(0, m0) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2}{16h^2} \pm 0,25G^*q; \\ w_1^-(0) &= 4w_{кл.} \left[ 1 + \frac{8}{5+\nu} [\varepsilon_0(2-t) + G^*/6 - \nu''/32] \frac{h^2}{R^2} \right] - \beta \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут  $t(\beta = 0,5) = 1 + 0,5A'h^2/l^2$ .

Порівнявши їх із відповідними формулами [9] для плити без тріщини, бачимо, що її жорсткість знижується майже у чотири рази, а міцність більше ніж удвоє, порівняно із суцільною плитою.

Випадок  $\theta = 0, \beta = 1$  у формулах (14) повністю співпадає із результатами для суцільної круглої плити, що одержані раніше в роботах авторів [9], а також за формулами теорії анізотропних товстих плит, одержаних С.Г. Лехніцьким [2].

Величини  $\delta, \beta, \varepsilon_0, G^*$  та  $B(\beta)$  у формулах (14) для вертикального переміщення  $w_1^-(0)$  та нормальних напружень  $\sigma_{r1}$  враховують ефекти поперечного зсуву та обтиснення. Прирівнявши їх значення у цих формулах до нуля, одержимо елементарні формули для напружень та переміщень за гіпотезами класичної теорії тонких пластин:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}^\pm(0, \pm h) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2}{32h^2} (1 + \theta^2); \\ \sigma_{r1}^\pm(0, m0) &= \pm \frac{3(3+\nu)qR^2\theta^2}{16h^2}; \\ w_1^-(0) &= \frac{qR^4}{64D} \frac{5+\nu}{1+\nu} (1 + 3\theta^4). \end{aligned} \quad (15)$$

У табл. 3 наведені результати підрахунків зведеного максимального переміщення у центрі плити, шарнірно опертої на краю, залежно від розташування тріщини в плиті (величин  $\beta$ ), розмірів тріщини та поперечної анізотропії плити для різних відносних товщин  $h/R$ . Результати порівнюються з результатами, які отримав вірменський вчений Єгназарян [1] за допомогою класичної теорії, що не розв'язував задачу, розділяючи пластину на верхню та нижню частини, а також з результатами порохованими МГЕ.

Таблиця 3. Відносне переміщення  $w_0 = w_1^- / w_{кл.}$  серединної поверхні частини плити під тріщиною  
Авторська розробка

$\beta;$ $\delta$	$h/R=0,1$			$h/R=0,2$			$\frac{G}{G'}, \frac{E}{E'}$
	$\theta = 0$	$\theta = 0,5$	$\theta = 1$	$\theta = 0$	$\theta = 0,5$	$\theta = 1$	
$\beta = 0,2;$ $\delta = 0,52$	1,0	1,410	1,923	1,0	1,410	1,923	Егназарян кл. теорія
	1,0	1,058	1,923	1,0	1,058	1,923	
	1,034	1,085	1,943	1,136	1,165	2,004	Ізотр. МГЕ
	1,035	1,053	1,905	1,174	1,198	2,093	
	1,437	1,465	2,252	2,709	2,697	3,241	Анізотр.
$\beta = 0,5;$	1,0	1,941	4,0	1,0	1,941	4,0	Егназарян кл. теорія
	1,0	1,187	4,0	1,0	1,187	4,0	

	1,034 1,035	1,191 1,089	4,041 3,937	1,136 1,174	1,200 1,238	4,164 4,460	Ізотр. МГЕ
	1,437	1,648	4,529	2,709	3,029	6,101	Анізотр.

Аналіз даних табл. 3 показує, що у випадку розділення плити тріщиною на пластини неоднакової товщини відбувається перерозподіл нормальних напружень у сторону їх збільшення в пластинах із більшою товщиною і навпаки — зменшення в пластинах із меншою товщиною. Разом з тим, більш точні (порівняно із класичною теорією тонких пластин) підрахунки показують відсутність прямо пропорційної залежності величин напружень від товщини утворених пластин, які мають місце в класичній теорії згину. Збільшення трансверсальної ізотропії матеріалу веде також і до збільшення на 13,9% (для  $h/R = 0,2$ ) величини максимальних напружень  $\sigma_r(0, \pm h)$ .

**Висновки.** Знайдено узагальнений метод розрахунку пластин, пошкоджених тріщинами. Отримані зручні для інженерного використання аналітичні залежності для обчислення напружень та переміщень у ізотропних і трансверсально-ізотропних пластинах, пошкоджених горизонтальною тріщиною. Для розрахунку використано некласичну модель згину трансропних плит. Ці результати дозволяють прогнозувати, із достатньою практичною точністю, міцність та жорсткість пластин за геометричними параметрами тріщин в пластині, а також різними фізичними характеристиками матеріалу, його поперечної анізотропії.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням довжини тріщини напруження та переміщення у плиті будуть зростати до значень, які можуть виникати у двох окремих плитах, покладених одна на одну без тертя. Тоді напруження в них стануть, приблизно, удвічі, а переміщення учетверо, більшими. Поправки від урахування деформацій поперечного зсуву та обгиснення для напружень є незначними у випадку ізотропного матеріалу. Разом з тим, для трансропних матеріалів (склопластики, дерево та ін.) ці поправки вже можуть бути істотними.

1. Гнуни В.Ц., Егизарян Т.А. Об устойчивости пластинок, ослабленных трещиной / В.Ц. Гнуни, Т.А. Егизарян // Оптимальное управление устойчивости и прочности механических систем. – Єреван: Издательство ЕГУ, 2002. – С. 37–41.
2. Лехницький С.Г. К теории анизотропных толстых плит / С.Г. Лехницький // Известия АН ССР, ОТН, мех. и машстр. – 1959. – № 2. – С. 141–145.
3. Марчук М.В. Змішана схема методу скінчених елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин / М.В. Марчук, М.М. Хом'як. – Львів: ПІММ ім. Я.С. Підстригала НАН України, 2003. – 216 с.
4. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинках и облочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К.: Наукова думка, 1975. – 444 с.
5. Серенсен С.В. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами / С.В. Серенсен, Г.П. Зайцев. — Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
6. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Пер с англ. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.
7. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
8. Швабюк В.И. О одном варианте обобщенной теории трансверсально изотропных плит / В.И. Швабюк // Прикл.механика. – К., 1974. – Т. 10. – №11. – С. 87–92.
9. Швабюк В.И. Изгиб круглых трансверсально изотропных плит с учетом поперечного сдвига и обжатия / В.И. Швабюк, Р.И. Глек // Расчет пространственных строительных конструкций. – Куйбишев: КуйСИ, 1979. – Вып. 8.– С. 95–101.