УДК 519.64(045)
В.Ю. Середа, професор
Луцький національний технічний університет

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ

Середа В.Ю. Узагальнений метод розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду. В роботі пропонується метод розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду, який є узагальненням ряду відомих методів. Виводиться апріорна оцінка похибки методу. Наведений приклад ілюструє ефективність методу і показує його переваги над іншими методами.
Ключові слова: рівняння, інтегральне рівняння, оцінка похибки, параметр, метод.
Форм. 43. Літ. 7.

Середа В.Ю. Обобщенный метод решения интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. В работе предлагается метод решения линейных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, который является обобщением ряда известных методов. Выводится априорная оценка погрешности метода. Приведенный пример иллюстрирует эффективность метода и показывает его преимущества перед другими методами.
Ключевые слова: уравнение, интегральное уравнение, оценка погрешности, параметр, метод.

Sereda V. The generalized method of solving of integral equations of Fredholm type of the second kind. The paper proposes a method of solving of linear integral equations of Fredholm type the which is a generalization of several well-known methods. A priori estimation of error of the methods is deduced. This example illustrates the effectiveness of the method and shows its advantages over other methods.
Keywords: equation, integral equation, estimation of error, parameter, method.

Постановка проблеми. Математичними моделями багатьох задач математичної фізики, механіки і техніки є лінійні та нелінійні інтегральні рівняння. Тому проблема пошуку оптимальних методів їх розв'язання була і є актуальною в даний час.

Оскільки інтегральні рівняння, як правило, розв'язуються наближено, то зусилля математиків були і є зосередженими на пошуку оптимальних методів їх наближеного розв'язання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Початок цим методам був покладений ще в роботах Фредгольма [1;2], Шмідта, Гурса і Ністрема вкінці XIX століття. Фредгольм в своїх роботах одержав точний розв'язок рівняння $\varphi(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ у вигляді $\varphi(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,s,\lambda)P_0(s)ds$, де $\Gamma(x,s,\lambda)$ – резольвента Фредгольма $\Gamma(x,s,\lambda)=\dfrac{D(x,s,\lambda)}{D(\lambda)}$ при умові, що функції $P_0(x)$ і $K(x,s)$ неперервні і $D(\lambda)\neq 0$. Про ці і наступні дослідження йдеться в статті [3].

Аналізуючи наближені методи розв'язання рівнянь типу Фредгольма другого роду, можна стверджувати, що вони розвивалися в напрямах розширення області застосування цих методів і в отриманні зручної і ефективної методики знаходження похибки одержаного результату.

Мета дослідження полягає в побудові так званого узагальненого методу розв'язання рівнянь вищенаведеного виду, який був би більш ефективним в порівнянні з існуючими методами.

Основні результати досліджень.

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння типу Фредгольма другого роду

$$\varphi(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds, \tag{1}$$

де $\varphi(x)$ – шукана, $P_0(x)$, $K(x,s)$ – задані функції деякого класу (класу C, L_2 або L_p) відповідно в областях $a\le x\le b$ і $a\le x,s\le b$, λ – параметр рівняння (взагалі кажучи, комплексний), a,b – скінченні або нескінченні межі інтегрування.

Для розв'язання рівняння (1) ядро $K(x,s)$ представимо в квадраті $a\le x,s\le b$ у вигляді суми двох ядер – виродженого і „малого“:

$$K(x,s) = K^*(x,s) + D(x,s), \tag{2}$$

де

$$K^*(x,s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) Q_i(s), \tag{3}$$

$$D(x,s) = K(x,s) - K^*(x,s), \tag{4}$$

а $P_i(x)$, $Q_i(x)$ – неперервні на $[a,b]$ функції своїх аргументів.

В якості $K^*(x,s)$ можна взяти відрізок ряду Фур'є або відрізок ряду Тейлора по змінній s.

Припустимо, що параметр λ приймає регулярні значення, так що розв'язок $\varphi(x)$ існує і єдиний. Шуканий розв'язок $\varphi(x)$ рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$\varphi(x) = M_0(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(x), \tag{5}$$

де $M_i(x)$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ – невідомі функції, а

$$\alpha_i = \int_a^b Q_i(s)\varphi(s)\,ds \ - \tag{6}$$

невідомі коефіцієнти.

Підставляючи (5) в рівняння (1) і враховуючи при цьому рівність (2), одержимо:

$$\begin{aligned} M_0(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(x) &= P_0(x) + \lambda \int_a^b \left[K^*(x,s) + D(x,s)\right] \cdot \left[M_0(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(s)\right] ds = \\ &= P_0(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} P_i(x) Q_i(s) M_0(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b \sum_{i=1}^{n} P_i(x) Q_i(s) \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(s)\,ds + \\ &+ \lambda \int_a^b D(x,s) M_0(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b D(x,s) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(s)\,ds = P_0(x) + \lambda \int_a^b D(x,s) M_0(s)\,ds + \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b D_i(s) \left[M_0(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(s)\right] ds + \lambda^2 \int_a^b D(x,s) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(s)\,ds = \\ &= P_0(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(x) + \lambda \int_a^b D(x,s) M_0(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b D(x,s) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(s)\,ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Прирівнюючи в (7) відповідні вирази при α_i і вільні члени, для визначення невідомих функцій $M_0(x)$, $M_i(x)$ одержимо $n+1$ лінійних інтегральних рівнянь

$$M_i(x) = P_i(x) + \lambda \int_a^b D(x,s) M_i(s)\,ds \quad \left(i = \overline{0,n}\right) \tag{8}$$

з одним і тим же „малим" ядром $D(x,s)$.

Істотним при цьому є те, що параметр λ не буде характеристичним для цього ядра. Крім того, шляхом апроксимації ядра $K(x,s)$ можна завжди досягнути виконання умови

$$q = |\lambda| \sqrt{\int_a^b \int_a^b D^2(x,s)\,dx\,ds} < 1 \tag{9}$$

і, таким чином, для розв'язання рівнянь (8) можна застосувати як метод послідовних наближень, так і інші наближені ітераційні методи, як, наприклад, метод осереднення функціональних поправок [4] або його узагальнення [5].

Розв'язавши рівняння (8) і врахувавши співвідношення (6), одержимо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів в (5):

$$\alpha_i = \int_a^b Q_i(s) M_0(s) + \lambda \int_{j=1}^{n} \alpha_j M_j(s) Q_i(s) ds$$

або
$$\alpha_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_{ij} = b_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{10}$$

де
$$c_{ij} = \int_a^b Q_i(s) M_j(s) ds \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right), \tag{11}$$

$$b_i = \int_a^b Q_i(s) M_0(s) ds \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{12}$$

або
$$A\vec{\alpha} = \vec{b}\,. \tag{13}$$

де $A = E - \lambda C$, E – одинична матриця, $C = \{c_{ij}\}$, $\vec{\alpha} = \{\alpha_i\}$, $\vec{b} = \{b_i\}$, а c_{ij}, b_i і α_i виражаються, відповідно, співвідношеннями (11), (12), і (6). Причому, внаслідок існування розв'язку $\varphi(x)$ рівняння (1), матриця A не вироджена, так що $\vec{\alpha} = A^{-1}\vec{b}$ (A^{-1} – обернена матриця).

Таким чином, розв'язок рівняння (1) може бути знайдений при довільному регулярному значенні параметра λ.

З цього методу, як частинні випадки, можна одержати: метод послідовних наближень (при $K^*(x,s) \equiv 0$ в (2); добре відомий метод заміни ядра виродженим (при $D(x,s) \equiv 0$); ітераційний метод осереднення функціональних поправок [4] (якщо даний метод при $n = 1$, $P_1(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x,s) ds$, $Q_1 = 1$ в (2) і $D(x,s) \equiv 0$ в (8) застосувати спочатку до рівняння (1), а після цього – до відповідних інтегральних рівнянь похибки

$$\delta_i(x) = \varepsilon_i(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \delta_i(s) ds,$$

де $\delta_i(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)$, $\varepsilon_i(x) = P_0(x) - \varphi_i(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds$, $(i = 0,1,2,\ldots)$);

метод смуг [6] (якщо обмежитись в (2) одним або двома членами апроксимації, причому $Q_1(s) \equiv 1$, такий спосіб апроксимації ядра застосовувати по прямокутниках $s_i \le s \le s_{i+1}$ і допоміжні інтегральні рівняння (8) розв'язувати методом послідовних наближень).Розглянемо питання про збіжність і про оцінку похибки методу (в метриці простору C) в тому випадку, коли рівняння (8) розв'язуються будь-яким наближеним методом. В результаті замість функцій $M_i(x)$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ одержимо їх наближення $M_i^*(x)$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ і, отже, замість шуканого розв'язку $\varphi(x)$ рівняння (1) – його наближений розв'язок

$$\varphi^*(x) = M_0^*(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* M_i^*(x), \tag{14}$$

де
$$\alpha_i^* = \int_a^b Q_i(s) \varphi^*(s) ds\,. \tag{15}$$

Параметри α_i^* визначаємо із системи n лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$A^*\vec{\alpha}^* = \vec{b}^*, \tag{16}$$

де
$$A = E - \lambda C^*, \tag{17}$$

C^* – n-квадратна матриця з елементами

$$c_{ij}^* = \int_a^b Q_i(s) M_j^*(s)\, ds \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right), \tag{18}$$

$\vec{\alpha}^* = \{\alpha_i^*\}$, $\vec{b}^* = \{b_i^*\}$ – n-компонентні вектори, а

$$b_i^* = \int_a^b Q_i(s) M_0^*(s)\, ds \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{19}$$

Нехай апроксимація ядра $K(x,s)$ і наближення $M_i^*(x)$ $\left(i = \overline{0,n}\right)$ настільки точні, що матриця A^* – не вироджена. Тоді з (5) і (14) маємо:

$$\left\|\varphi(x) - \varphi^*(x)\right\| \le r_0 + |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \left\|\alpha_i(x) M_i(x) - \alpha_i^* M_i^*(x)\right\| \le$$

$$\le r_0 + |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i^*\right| r_i + |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \left\|M_i(x)\right\| \cdot \left|\alpha_i - \alpha_i^*\right|, \tag{20}$$

де
$$r_i = \left\|M_i(x) - M_i^*(x)\right\| \quad \left(i = \overline{0,n}\right). \tag{21}$$

Для застосування цієї оцінки необхідно знайти величини $\left\|M_i(x)\right\|$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, r_i $\left(i = \overline{0,n}\right)$ і $\left|\alpha_i - \alpha_i^*\right|$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ або їх оцінки. Величини $\left|\alpha_i^*\right|$ відомі в результаті розв'язання системи рівнянь (16) або можуть бути оцінені нерівностями:

$$\left|\alpha_i^*\right| \le \left\|\vec{\alpha}^*\right\|_1 \le N \cdot \left\|\vec{b}^*\right\|_1 \le N q_i \left\|M_0^*(x)\right\|, \tag{22}$$

де
$$q_i = \int_a^b \left|Q_i(s)\right| ds, \tag{23}$$

$$N = \left\|A^{*-1}\right\|. \tag{24}$$

(Символом $\|\cdot\|_1$ позначена перша норма векторів і матриць).

Величини r_i можна оцінити конкретно для методу, який застосовується при розв'язанні рівнянь (8).

Оцінимо в (20) величини $\left\|M_i(x)\right\|$ і $\left|\alpha_i - \alpha_i^*\right|$. Нехай апроксимація ядра в (2) така, що

$$q = |\lambda| \sqrt{\int_a^b \int_a^b \left|D(x,s)\right|^2 dx ds} < 1. \tag{25}$$

Тоді (див. [4])

$$\left\|M_i(x)\right\| \le q \frac{R_i}{1-q} + \left\|P_i(x)\right\| \quad \left(i = \overline{0,n}\right), \tag{26}$$

де
$$R_i = \frac{|\lambda|}{q} \left\| \sqrt{\int_a^b \left|P_i(x)\right|^2 dx \int_a^b \left|D(x,s)\right|^2 ds} \right\|. \tag{27}$$

Далі, віднімаючи з (13) вираз (16), після тотожніх перетворень знаходимо, що

$$A^*\left(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*\right) = \vec{f} + \lambda\left(C - C^*\right)\left(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*\right), \tag{28}$$

де A^* – матриця (17), $\vec{f}$ – n-компонентний вектор:

$$\vec{f} = \left\{ b_i - b_i^* + \lambda \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \alpha_j^* \right\}, \quad \left(i = 1, n\right), \tag{29}$$

а
$$s_{ij} = c_{ij} - c_{ij}^*. \tag{30}$$

Введемо позначення:
$$S = \left\|C - C^*\right\|_1, \tag{31}$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} r_i\,,\quad \delta = \sum_{i=1}^{n} \left\| M_i\left(x\right) \right\|,\quad Q = \max_i q_i\,, \tag{32}$$

$$\mu = r_0 + \left|\lambda\right| N\gamma Q \left\| M_0^*\left(x\right) \right\|. \tag{33}$$

Очевидно, що при достатньо хорошій апроксимації ядра внаслідок „малості" ядра $D\left(x,s\right)$ і (або) достатньо малих r_i буде виконуватись нерівність

$$\Delta = 1 - \left|\lambda\right| \gamma Q N > 0\,. \tag{34}$$

Для величин s_{ij}, які визначаються формулою (30), відповідно до позначень (11), (18), (23) і (21), маємо:

$$\left|s_{ij}\right| = \left| \int_a^b Q_i\left(s\right) M_j\left(s\right) ds - \int_a^b Q_i\left(s\right) M_j^*\left(s\right) ds \right| \le \int_a^b \left|Q_i\left(s\right)\right| \cdot \left\| M_j\left(s\right) - M_j^*\left(s\right) \right\| ds \le q_i r_j\,. \tag{35}$$

Для оцінки різниці $\left|b_i - b_i^*\right|$, враховуючи позначення (12), (19), (23) і (21), одержуємо:

$$\left|b_i - b_i^*\right| = \left| \int_a^b Q_i\left(s\right)\left[M_0\left(s\right) - M_0^*\left(s\right) \right] ds \right| \le q_i r_0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{36}$$

Значить, $$S = \left\| C - C^* \right\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|s_{ij}\right| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} q_i r_i = \gamma \cdot Q \quad \text{(див. (32))}, \tag{37}$$

$$1 - \left|\lambda\right| NS > \Delta > 0 \ \text{(див. (34))} \tag{38}$$

і, згідно з отриманими оцінками (36), (35), (22) і позначень (33), з (29) послідовно знаходимо:

$$\left\| \vec{f} \right\|_1 = \max_i \left| b_i - b_i^* + \lambda \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot \alpha_j^* \right| \le \max_i q_i r_0 + \max_i \left|\lambda\right| \cdot \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j^*\right| q_i r_i \le$$

$$\le Q\left(r_0 + \left|\lambda\right| \gamma Q N \left\| M_0^*\left(x\right) \right\| \right) = Q\mu\,. \tag{39}$$

Оцінку похибки, яка виникає при визначенні параметрів α_i, враховуючи нерівності (39), (37), (38) і позначення (24), тепер легко одержати із співвідношення (28). Справді:

$$\left|\alpha_i - \alpha_i^*\right| \le \left\| \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^* \right\|_1 = \frac{\left\| \vec{f} \right\|_1 \cdot \left\| A^{*-1} \right\|_1}{1 - \left|\lambda\right| \cdot \left\| A^{*-1} \right\| \cdot \left\| C - C^* \right\|_1} \le \frac{NQ\mu}{\Delta}, \ \text{тобто}$$

$$\left|\alpha_i - \alpha_i^*\right| \le \frac{NQ\mu}{\Delta} \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{40}$$

З врахуванням (26), (32) ÷ (35) і щойно одержаних оцінок, з нерівності (20) остаточно одержуємо:

$$\left\| \varphi\left(x\right) - \varphi^*\left(x\right) \right\| \le r_0 + \left|\lambda\right| \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i^*\right| r_i + \left|\lambda\right| \sum_{i=1}^{n} \left\| M_i\left(x\right) \right\| \cdot \left|\alpha_i - \alpha_i^*\right| \le$$

$$\le r_0 + \left|\lambda\right| NQ\gamma \left\| M_0^*\left(x\right) \right\| + \frac{NQ\mu\delta\left|\lambda\right|}{\Delta} = \mu\left(1 + \frac{\delta\left|\lambda\right| QN}{\Delta} \right),$$

тобто $$\left\| \varphi\left(x\right) - \varphi^*\left(x\right) \right\| \le \mu\left(1 + \frac{\delta\left|\lambda\right| QN}{\Delta} \right). \tag{41}$$

Одержана оцінка похибки (41) є апріорною, оскільки всі величини, які входять до правої частини цієї нерівності, є апріорі відомими. Розглянемо тепер більш конкретний випадок, коли інтегральні рівняння (8) розв'язуються наближено, наприклад, методом послідовних наближень, процес ітерацій якого із-за виконання умови (25) буде збіжним:

$$M_{i,k_i+1}\left(x\right) = P_i\left(x\right) + \lambda \int_a^b D\left(x,s\right) M_{i,k_i}\left(s\right) ds \tag{42}$$

$$(i=\overline{0,n};\ M_{i,0}=P_i(x);\ k_i=0;1;2;\ldots).$$

Нехай для кожного з рівнянь (8) виконано, відповідно, по k_i ітерацій і отримано наближення $M_i^*(x)=M_{i,k_i}(x)$.

Тоді, як відомо, (див. напр. [7]): $\left\|M_i(x)-M_{i,k_i}(x)\right\|=r_i\le R_i\dfrac{q^{k_i+1}}{1-q}\quad \left(i=\overline{0,n}\right)$, де величини $R_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ визначаються рівностями (27).

Згідно з (32) – (34) маємо:

$$\gamma\le\sum_{i=1}^{n}R_i\frac{q^{k_i+1}}{1-q},\quad \mu\le R_0\frac{q^{k_0+1}}{1-q}+|\lambda|NQ\left\|M_0^*(x)\right\|\cdot\sum_{i=1}^{n}R_i\frac{q^{k_i+1}}{1-q},\quad \Delta_1=1-|\lambda|\sum_{i=1}^{n}R_i\frac{q^{k_i+1}}{1-q}\cdot Q\cdot N<\Delta .$$

Враховуючи останні співвідношення і покладаючи $k=\min k_i$, одержимо апріорну оцінку методу:

$$\left\|\varphi(x)-\varphi^*(x)\right\|\le L\frac{q^{k+1}}{1-q},\tag{43}$$

$$L=\beta\left(1+\frac{|\lambda|NQ\delta}{\Delta_1}\right),\quad \beta=R_0q^{k_0-k}+|\lambda|NQ\left\|M_0^*(x)\right\|\cdot\sum_{i=1}^{n}R_iq^{k_i-k}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність методу. З (43), зокрема при $k_i=0\left(i=\overline{0,n}\right)$ в ітераційному процесі (42), одержуємо оцінку похибки методу заміни ядра виродженим при розв’язанні ним інтегрального рівняння (1).

Приклад. Для ілюстрації розглянутого методу і його апріорної оцінки похибки розв’яжемо інтегральне рівняння

$$\varphi(x)=x^3\left(\frac{1}{4!}-\frac{x^2}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\frac{x^6}{10!}+\frac{x^8}{12!}\right)+\lambda\int_0^1\left(1-\frac{x^3s^3}{3!}+\frac{x^5s^5}{5!}-\frac{x^7s^7}{7!}+\frac{x^9s^9}{9!}-\frac{x^{11}s^{11}}{11!}\right)\varphi(s)ds$$

(його точний розв’язок $\varphi(x)\equiv1$ при $\lambda=1$).

Метод послідовних наближень тут застосовний лише при $|\lambda|<1,02$. Приймемо $\lambda=1$ і представимо ядро рівняння у вигляді:

$$K(x,s)=1-\frac{x^3s^3}{3!}+\frac{x^5s^5}{5!}+D(x,s),\ \text{де}\ D(x,s)=\frac{x^9s^9}{9!}-\frac{x^7s^7}{7!}-\frac{x^{11}s^{11}}{11!}.$$

Маємо: $P_0(x)=\dfrac{x^3}{4!}-\dfrac{x^5}{6!}+\dfrac{x^7}{8!}-\dfrac{x^9}{10!}+\dfrac{x^{11}}{12!}$, $P_1(x)=1$; $P_2(x)=x^3$; $P_3(x)=x^5$; $Q_1(s)=1$; $Q_2(s)=-\dfrac{s^3}{3!}$; $Q_3(s)=\dfrac{s^5}{5!}$.

Рівняння (8) мають вигляд:

$$M_0(x)=\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\frac{x^7}{8!}-\frac{x^9}{10!}+\frac{x^{11}}{12!}+\int_0^1D(x,s)M_0(s)ds,$$

$$M_1(x)=1+\int_0^1D(x,s)M_1(s)ds,$$

$$M_2(x)=x^3+\int_0^1D(x,s)M_2(s)ds,$$

$$M_3(x)=x^5+\int_0^1D(x,s)M_3(s)ds.$$

Для їх розв'язання застосуємо метод послідовних наближень. Його можна застосовувати уже при $|\lambda| < 75000$. Після першої ітерації одержимо:

$$M_0^*(x) = \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \frac{x^{11}}{12!} - 0,000000267x^9 + 0,000024071x^7;$$

$$M_1^*(x) = 1 + \frac{x^9}{10!} - \frac{x^7}{8!} - \frac{x^{11}}{12!};$$

$$M_2^*(x) = x^3 + \frac{x^9}{9!\cdot 13} - \frac{x^7}{7!\cdot 11} - \frac{x^{11}}{11!\cdot 15};$$

$$M_3^*(x) = x^5 - \frac{x^9}{9!\cdot 15} - \frac{x^7}{7!\cdot 13} - \frac{x^{11}}{11!\cdot 17}.$$

Згідно (14) наближений розв'язок матиме вигляд:

$$\varphi^*(x) = M_0^*(x) + \alpha_1^* M_1^*(x) + \alpha_2^* M_2^*(x) + \alpha_3^* M_3^*(x),$$

де, згідно з (16) для визначення коефіцієнтів $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ маємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0,000003072\alpha_1^* - 0,249997766\alpha_2^* - 0,166664676\alpha_3^* = 0,010188168, \\ 0,041666294\alpha_1^* + 1,023809253\alpha_2^* + 0,018518282\alpha_3^* = -0,000966705, \\ -0,001388872\alpha_1^* - 0,000925914\alpha_2^* + 0,999242434\alpha_3^* = 0,000037543, \end{cases}$$

з якої знаходимо:

$$\alpha_1^* = 1,000000130, \quad \alpha_2^* = -0,041666671, \quad \alpha_3^* = 0,001388889.$$

Таким чином, згідно з (14),

$$\varphi^*(x) = 0,041666666x^3 - 0,001388888x^5 + 0,000024071x^7 - 0,000000267x^9 + 0,000000002x^{11} +$$
$$+1,000000130\left(1 + 0,000000276x^3 - 0,000024802x^7 - 0,00000000x^{11}\right) -$$
$$-0,041666671\left(x^3 + 0,000000212x^9 - 0,000015263x^7 - 0,000000001x^{11}\right) +$$
$$+0,001388889\left(x^5 + 0,000000184x^9 - 0,000018033x^7 - 0,00000000x^{11}\right) =$$
$$= 1,000000130 + 0,000000005x^3 + 0,000000001x^5$$

з похибкою $\left|\varphi(x) - \varphi^*(x)\right| \le 0,000000136 < 1,4\cdot 10^{-7}$.

Оцінка похибки, обчислена за формулою (43), показує, що $\left|\varphi(x) - \varphi^*(x)\right| \le 2\cdot 10^{-6}$. Якщо при розв'язанні рівнянь (8) обмежитись нульовим наближенням (метод заміни ядра виродженим), то одержимо наближений розв'язок

$$\varphi^*(x) = 1,000184792 - 0,000012544x^3 + 0,000000260x^5 + 0,000024802x^7 -$$
$$-0,000000276x^9 + 0,000000002x^{11}$$

з похибкою $\left|\varphi(x) - \varphi^*(x)\right| \le 2\cdot 10^{-4}$, тобто одна додаткова ітерація зменшує похибку розв'язку рівняння більше ніж в 1400 разів у порівнянні з методом заміни ядра.

Висновки. Таким чином, побудований метод наближеного розв'язання інтегральний рівнянь типу Фредгольма другого роду узагальнює відомі методи послідовних наближень, метод заміни ядра виродженим, ітераційний метод осереднення функціональних поправок і метод смуг; дає можливість розв'язувати рівняння і в тих випадках, коли ці методи не дають результатів; оцінка похибки його має апріорний характер, що дозволяє, не розв'язуючи інтегральне рівняння, наперед розщепити ядро рівняння так, щоб досягти наперед заданої точності.

Список використаних джерел.

1. Fredholm J. Sur une nouvelle methode pour la resolution du probleme de Dirichlet, Kong. Vetenskaps – Akademtes Förh., Stockholm, 1900.

2. Fredholm J. Sur uneclasse d'equations fonctionnelles, Acta Math., 27, 1903.
3. В.Ю. Середа Про методи розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду, Міжвузівський збірник «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». Луцьк, 2011. Випуск №3.
4. Соколов Ю.Д. Про один метод наближеного розв'язання лінійних інтегральних та диференціальних рівнянь. – ДАН УРСР, №2, 1955.
5. Калайда А.Ф. Новый метод приближенного решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений. – Тр. I-ой Республ. конфер. молодых исследов. в области матем., т.I, К., 1964.
6. Положій Г.М., Чаленко П.Й. Метод смуг розв'язування інтегральних рівнянь. – ДАН УРСР, №4, 1962.
7. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Физматгиз, 1959.