УДК 001 (09)
Лісковець С.М.
Луцький національний технічний університет

ПРО МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В РОБОТАХ Я.П. КУЛИКА

С.М. Лісковець. Про методи розв'язування алгебраїчних рівнянь в роботах Я.П. Кулика. В статті узагальнені дослідження наукових праць Я.П. Кулика з теорії алгебраїчних рівнянь, запропоновані Куликом; описані відповідні математичні таблиці для знаходження наближених розв'язків рівнянь.
Ключові слова: методи розв'язування, корені рівнянь, парні та непарні детермінанти, наближені обчислення, табличні значення.

С.М. Лисковец. О методах решения алгебраических уравнений в работах Я.Ф. Кулика. В статье обобщены исследования научных трудов Я.Ф. Кулика с теории алгебраических уравнений, представлены методы решения уравнений, предложенные Куликом, описаны соответствующие математические таблицы для нахождения приблизительных решений уравнений.
Ключевые слова: методы решения, корни уравнений, четные и нечетные детерминанты, приближенные вычисления, табличные значения.

S.M. Liskovets.About methods of solving algebraic equations in the work of Y.P. Kulik. The article summarizes the research of scientific papers Y.P. Kulikon the theory of algebraic equations proposed by Kulik; the relevant mathematical tables are described for finding approximate solutions of equations.
Key words: methods of solution, roots of equations, even and odd determinants, approximate calculation, tabulated values.

Постановка проблеми. В результаті вивчення наукового доробку математика й обчислювача Я.П. Кулика (1793-1863), вперше були встановлені та охарактеризовані напрямки його творчої діяльності, серед яких дослідження окремих питань теорії алгебраїчних рівнянь та створення відповідної практичної бази для обчислення наближених значень коренів алгебраїчних рівнянь. Дослідження маловідомих робіт вченого дає змогу встановити, що вчений запропонував і обґрунтував один із методів встановлення структури та знаходження коренів як кубічних рівнянь так і алгебраїчних рівнянь вищих степенів. Ні способи встановлення структури коренів, ні методи їх знаходження, ні масштабні математичні таблиці наближених розв'язків до цього часу не були представлені ні в науковій, ні в навчальній літературі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В малочисельних статтях [1-4] дослідників творчості Я.П. Кулика лише зроблений акцент на необхідності вивчення праць вченого пов'язаних з алгебраїчними рівняннями. Окремі положення про структуру коренів на характеристики певних способів розв'язування кубічних рівнянь були представлені в публікаціях [5].

Метою дослідження є представлення окремих підходів до розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів, ознайомлення з масштабними математичними таблицями вченого, що дають можливість знаходити наближені корені рівнянь.

Основні результати досліджень. В роботі «Beiträge zur Auflösung Höherer Gleihungen überhaupt und der kubischen Gleihungen insbesondere» («Розв'язування рівнянь вищих степенів в цілому та розв'язування кубічних рівнянь зокрема»)[6]. Кулик зупиняється на знаходженні коренів різної структури, в тому числі і так званих трансцендентних. За словами автора, найбільшою проблемою під час знаходження коренів є той випадок, коли рівняння з всіма раціональними коефіцієнтами має такий корінь, який не можна виразити за допомогою радикалів, або такий корінь, який виражається настільки заплутаними ірраціональними виразами, які не дозволяють легко та точно провести обчислення для визначення числового значення. Саме такі корені називають трансцендентними коренями рівняння. Найбільшу увагу автор приділяв кубічним рівнянням. За словами вченого, якби існував спосіб встановлення наявності трансцендентних коренів у заданому рівнянні, тоді легше було б визначити його величину за допомогою, на той час добре відомого, методу апроксимації. Хоча при багаторазовому використанню методу апроксимації, стверджує автор, замість раціонального кореня отримувалась би його досить наближена величина, а кожний з обох ірраціональних коренів, величина яких відрізняється одна від одної лише знаками «+» і «-».ю повинні визначатися при повторній апроксимації, що є недоліком, який і заважає загальному використанню методу апроксимації.

Я.П. Кулик у своїй роботі пропонує метод, який спочатку передбачає з’ясування наявності тих, чи інших коренів: раціональних, ірраціональних, трансцендентних. На наступному кроці знаходяться встановлені корені, уникаючи методу апроксимації, що дозволяє отримати наближені значення з меншою похибкою.

Одним із завдань, які ставив перед собою Кулик в роботі «Розв’язування рівнянь вищих степенів…», було створення практичної бази для знаходження коренів кубічних рівнянь. Для цього талановитий обчислювач розрахував таблиці, які повністю визначають раціональні та ірраціональні корені, а після простої підготовчої роботи і трансцендентні корені кубічних рівнянь (трансцендентні корені автор виражає, в основному, тригонометричними функціями).

Я.П. Кулик у своїх дослідженнях проводить, в першу чергу, детальний аналіз розв’язків кубічних рівнянь, групуючи рівняння за різною структурою коренів. Згідно з класифікацією автора рівняння поділяються на сім типів. Кубічні рівняння можуть мати: 1) три раціональні корені; 2) один корінь – раціональний, два інші – ірраціональні; 3) один корінь – раціональний, два інші – уявні (комплексно спряжені); 4) три корені ірраціональні; 5) три корені ірраціональні, серед яких два однакових; 6) всі три корені різні, але трансцендентні; 7) один корінь трансцендентний, два інших – комплексно спряжені.

На відміну від квадратних рівнянь, структуру кубічних зразу визначити неможливо. Автор зауважував, що відомі формули Кардано можуть знайти корені кубічних рівнянь 3,4,5 типів. При розв’язуванні кубічних рівнянь, Кулик пропонував використовувати спосіб встановлення типу кореня, при цьому очевидними є такі висновки: якщо рівняння має ірраціональний корінь, тоді це рівняння 1-3 типу; відсутність раціонального кореня, але наявність ірраціонального веде до рівнянь 4-5 типу; і лише, встановивши, що рівняння не має ні раціонального, ні ірраціонального коренів можна стверджувати про рівняння 6-7 типу (рівняння з трансцендентними коренями).

Яків Кулик для розв’язування кубічних рівнянь вигляду

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{1}$$

розглядав детермінант :

$$d = A^2 - 2B, \text{ або } d = A^2 + 2B \text{ (якщо } B < 0 \text{ в (1)).}$$

Якщо a, b, c – корені рівняння (1), тоді :

$$A = -(a + b + c),$$
$$B = ab + bc + ac,$$
$$C = -abc.$$

Після відповідних обчислень детермінант можна представити у вигляді

$$d = a^2 + b^2 + c^2,$$

тобто детермінант кубічного рівняння – це сума квадратів його коренів, отже Кулик зробив перший висновок: *детермінант кубічного рівняння з раціональними коренями є завжди додатнім.*

Якщо кубічне рівняння (1) має два ірраціональних корені b і c, де

$$b = p + \sqrt{g}, \quad c = p - \sqrt{g}, \quad \left(b + c = 2p, bc = p^2 - g\right),$$

тоді детермінант відповідного рівняння буде мати вигляд:

$$d = a^2 + 2\left(p^2 + g\right), \text{ при цьому } C = -a\left(p^2 - g\right). \tag{2}$$

Звідси слідує, що C і a мають різні знаки, якщо $p^2 > g$, в протилежному випадку – однакові.

Детермінант кубічного рівняння, що має комплексно спряжені корені, буде мати вигляд (потрібно змінити знаки (+ , –) величини g): [6].

$$d = a^2 + 2\left(p^2 - g\right), \qquad C = -a\left(p^2 + g\right). \tag{3}$$

Яків Кулик в роботі, аналізуючи детермінанти d кубічних рівнянь, робить ряд узагальнюючих висновків:

– лише рівняння з дійсними коренями мають завжди додатний детермінант ($d>0$);

– твердження про те, що при додатному детермінанті d рівняння буде мати лише дійсні корені – неправильне: наприклад, якщо $g<0$, а два інші корені – комплексно спряжені, тоді детермінант може бути додатнім у випадку

$$a^2+2p^2>2g\,;$$

– якщо детермінант від'ємний, або дорівнює нулеві, тоді кубічне рівняння завжди має два комплексно спряжені корені, причому детермінант від'ємний $(d<0)$, якщо

$$a^2+2p^2<2g;$$

а детермінант дорівнює нулеві $(d=0)$, якщо

$$a^2+2p^2=2g;$$

– якщо раціональний корінь кубічного рівняння a є парним числом, тоді і детермінант d є парним числом, у випадку, якщо a – непарне число, то таким буде і d. Тобто парні детермінанти відповідають парним величинам раціонального кореня рівняння, а непарні детермінанти – непарним величинам.

В роботі Я.П. Кулик пропонував користуватися виведеними формули для знаходження ірраціональних коренів через раціональний корінь a та числові коефіцієнти A, C кубічного рівняння (1). Таким чином, зникає потреба у відомій подвійній операції: не потрібно ділити кубічний многочлен на $(x-a_1)$ (a_1 – раціональний корінь) та розв'язувати відповідне квадратне рівняння. Ірраціональні корені p і g знаходяться у вигляді:

$$p=-\frac{1}{2}(A+a), \qquad g=p^2+\frac{C}{a} \qquad (\text{якщо } a>0), \qquad (4)$$

або

$$p=-\frac{1}{2}(A-a), \qquad g=p^2-\frac{C}{a} \qquad (\text{якщо } a<0). \qquad (5)$$

Потрібно зазначати, що наявність раціонального кореня a в кубічному рівнянні (1) Кулик пропонував визначити як за числовими значеннями так, і за математичними знаками коефіцієнтів даного рівняння.

Кулик побудував ряд таблиць (об'єм проведених підрахунків просто захоплює), які і створюють практичну базу для розв'язування кубічних рівнянь. Таблиці для знаходження коренів кубічних рівнянь він розбивав на дві групи, що відповідно відносяться до непарних та парних детермінантів. Спочатку автор опублікував таблицю „Непарних детермінантів кубічних рівнянь" від d =7 до d =325. В рядках і стовпчиках таблиці розміщуються наступні числові величини: детермінант d, вільний член C кубічного рівняння (1), непарний раціональний корінь a та відповідне значення p ірраціонального кореня.

Яків Кулик складав таблиці за значеннями d та C, обмежуючись знаходженням лише цілих значень p та дійсних коренів a. Складання таких таблиць, за словами автора, „може служити зразком майбутньому математику"[6, с.7]. Кулик стверджував, що побудова таблиць базується на таких факторах:

– якщо значення a та p у формулах (2) розглядати як константи, а величина g прийматиме один за одним всі величини 1, 2, 3, 4, 5, …, то відповідні детермінанти утворюють арифметичну прогресію з різницею a. Якщо $p^2>g$, то значення a зменшується до тих пір, поки не стане $p^2=g$, тоді $C=0$ і це значення в таблиці позначається зірочкою; і, навпаки, значення C буде зростати з різницею a, якщо $p^2<g$. Таким чином, якщо C знаходиться між спадаючими числами свого рядка, тоді a і C мають різні знаки, а, якщо C розміщується між зростаючими числами рядка, тоді a і C мають однакові знаки;

– якщо записувати обидві прогресії d та C одну під одною горизонтально, і так, щоб їх початкові члени відповідали тому ж самому значенню g, тоді довільно прийняті значення a та p можна ставити в кінці рядка значень C.

– завдяки особливості величин a та p, а саме, якщо спочатку для a брати непарні числа 1, 3, 5, …, а потім парні – 2, 4, 8,… і ставити в обидва рядки для p числа 1, 2, 3, 4, …, тоді можна отримати всі значення C, до яких належить певні значення a та p.

– випадок $p=0$ також знаходиться в таблиці тому, що тоді $C=AB$ і рівняння $x^3 + Ax^2 + Bx + AB = 0$ має два квадратичних корені: $x = \pm\sqrt{-B}$ та раціональний корінь $x= -A$.

Кожна сторінка таблиці нараховує близько 800 значень C. Так, як a та p можуть набувати як додатних, так і від'ємних значень, тоді для кожного значення C розглядається чотири рівняння. Отже, кожна сторінка таблиці містить розв'язки майже 3200 рівнянь. Таблиці парних та непарних детермінантів розміщуються на 15 сторінках. Кількість рівнянь, корені яких підрахував Яків Кулик, здається просто неймовірною.

Таблиці детермінантів (табл.1), побудовані Куликом, відзначаються зручністю, для користування ними автор запропонував детальні пояснення, що супроводжуються наведеними прикладами.

Згідно з оригіналом, фрагмент таблиці детермінантів має такий вигляд:

Таблиця 1. **Непарні детермінанти кубічних рівнянь**

Розроблено за [6]

7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	a	p
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	1
			2	1	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
				3	6	9	12	7	6	5	4	3	2	1	*	1	3
							6	15	18	21	24	27	30	33	36	3	1
								3	*	3	6	9	12	15	18	3	2
												21	18	15	12	3	3
												5	10	15	20	5	1
															10	5	2

В таблиці перший рядок – всі значення непарних детермінантів (d), під величинами d – значення коефіцієнту C, справа у стовпчиках – корінь a та частина p ірраціонального кореня $p \pm \sqrt{g}$.

Розв'язування відповідних кубічних рівнянь за допомогою таблиць дуже просте і не вимагає багато часу.

Наприклад: потрібно розв'язати рівняння

$$x^2\text{-}3x\text{-}14x+20=0$$

В даному рівнянні: A=-3, B= –14, C=20. Детермінант рівняння: $d=A^2\text{-}2B=37$. Із таблиці за значеннями d =37, C=20 знаходимо – a=5, p=1. Так, як C розміщується між зростаючими числами, то $p^2 < g$, звідси a=+3, а за формулами (4) знаходимо, що

$$P= \text{-}1/2(A+a)=\text{-}1; \quad g = p^2 + \frac{C}{a} = 5.$$

Отже, коренями даного рівняння є числа: 5; $-1 \pm \sqrt{5}$.

Таким чином, відповідна таблиця детермінантів дає можливість знаходити раціональний та два ірраціональних корені кубічного рівняння, обчисливши лише детермінант d за коефіцієнтами рівняння (1), всі інші підрахунки взяв на себе Я.П. Кулик, провівши неймовірну кількість обчислень та розмістивши кінцеві результати у таблицях.

Слідом за таблицею непарних детермінантів надрукована „Таблиця парних детермінантів“, в ній останнє значення детермінанта d =328. Таблиця працює за схемою, аналогічною до попередньої. Для зменшення об’єму таблиць та задля економії місця для чотирьохзначних величин *C*, Кулик вводить прості позначення: 10 позначається як *a*, 11 позначається як *b*.

У випадку, коли всі корені кубічного рівняння є раціональними, тоді за таблицями знаходяться ті ж самі значення *a* і *p*, які аналогічно зв’язані знаками (+, –). Згідно з формулами (4, 5) обчислюється величина *g*, що дорівнює r^2. Тоді відповідне кубічне рівняння має три раціональні корені: *a*, *p+r*, *p–r*.

В роботі „Розв’язування рівнянь вищих степенів в цілому та розв’язування кубічних рівнянь зокрема“ Я.П. Кулик пропонує один із способів визначення наявності раціонального кореня в рівняннях будь-якого степеня.

Для того щоб з’ясувати структуру коренів рівняння

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q = 0 \qquad (6)$$

Кулик розглядає вільний член *Q* рівняння (6), та величини Q', Q'', де

$$Q' = 1 + A + B + C + \ldots + P + Q$$
$$Q'' = 1 - A + B - C + \ldots \pm P \mp Q$$

Величина Q'' – це сума одиниці та всіх коефіцієнтів рівняння n-го порядку, при умові, що парні коефіцієнти стають непарними, а непарні – парними. Суть метода полягає в розкладі на множники вільного члена рівняння (6) та величин Q', Q''.

Кулик довів таке твердження: якщо ніякий дільник *Q* не збільшений, або не зменшений на одиницю від множників Q' та Q'', тоді рівняння n-го степеня (6) не має жодного цілого кореня.

Аналізуючи множники відповідних величин *Q*, Q', Q'', автор обґрунтував такі закономірності:

– ті множники *Q*, які на одиницю збільшені від дільників Q' та на одиницю зменшені від дільників Q'' є від’ємними коренями рівняння (6);

– ті множники *Q*, які на одиницю зменшені від дільників Q' та на одиницю збільшені від Q'' є додатними коренями рівняння (6).

Аналіз множників величин *Q*, Q', Q'' дав можливість зробити висновки про наявність кратних коренів рівняння (6) та коренів з протилежними знаками.

Висновки такі:

– якщо *c* є коренем кратності *r* рівняння (6), тоді c^r є дільником *Q*, а величини $(c-1)^r$ та $(c+1)^r$ є відповідно множниками Q' та Q'';

– рівняння (6) буде мати два однакові за значенням, але протилежні за знаком корені $\pm a$, якщо величини Q' та Q'' будуть відповідно ділитися на $(a-1)$ та $(a+1)$.

Крім того, Я.П. Кулик, досліджуючи множники величин *Q*, Q' та Q'', обґрунтував такі закономірності:

– якщо рівняння (6) має два корені, що відрізняються на одиницю: *a* та *a+1* і обидва додатні, тоді *a* є спільним дільником *Q*, та Q', а *a+1* – спільним дільником *Q* та Q'';

– якщо *a* та *a+1* – від’ємні корені рівняння (6), тоді *a+1* є спільним дільником *Q* та Q', а *a* – спільним дільником *Q* та Q'';

– якщо корені *a* та *a+1* рівняння (6) мають різні знаки, тоді одна із величин Q', або Q'' має з величиною *Q* два спільних множники *a* та *a+1*, а інша величина з *Q* спільних множників немає;

– якщо рівняння (6) має корені *a* та *a+2*, тоді *a+1* є спільним множником величин Q' та Q''.

Ці та інші висновки про структуру та закономірності коренів рівнянь вищих степенів тісно переплітаються з дослідженнями Я.П. Кулика про розклад складених чисел, підкреслюють доцільність, необхідність та користь таблиць дільників складених чисел.

Друга частина роботи Я.П. Кулика називається „Визначення первісного кореня для рівнянь будь-якого степеня“. Автор дав таке визначення: ірраціональні корені, чиї показники кореня дорівнюють порядковому степеню рівняння, називаються первісними коренями рівняння. Таким чином, обидва ірраціональні корені квадратного рівняння, а також ірраціональні кубічні корені є первісними коренями.

В даній частині своєї праці Кулик проводить дослідження властивостей коренів алгебраїчних рівнянь. Зокрема, для рівнянь вигляду

$$y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} = 0$$

Кулик виводить ряд формул. Наприклад, якщо a і b – корені даного рівняння, тоді

$a^3 + b^3 = A^3 - 3AB$, (для рівняння 3-го степеня),

$a^4 + b^4 = A^4 - 4A^2B + 2B^2$, (для рівняння 4-го степеня) і т.д.

Автор описав умови, для яких формули справедливі, знайшов відповідні біноміальні коефіцієнти.

Не оминув Кулик дослідження ірраціональних коренів алгебраїчних рівнянь. Він вивів формули для ірраціональних коренів рівнянь різних степенів через коефіцієнти біля невідомих, знайшов ірраціональні корені для рівнянь, в яких числові коефіцієнти мають спеціальні структури. Автор також знайшов корені багатьох рівнянь, в яких коефіцієнти виражаються певними закономірностями, а корені мають певну залежність від величин *p*, якими задаються коефіцієнти.

Наприклад, рівняння

$x^3 + 3px + p - p^2 = 0$ має корінь $x = \sqrt[3]{p^2} - \sqrt[3]{p}$, $p \in Z$,

$x^4 - 2px^2 - 4px + p^2 - p = 0$ має корінь $x = \sqrt[4]{p^2} + \sqrt[4]{p}$ і т.д.

Кулик вивів аналогічні формули для рівнянь від третього до десятого степеня, звертаючи увагу на їх доцільне застосування. Саме такі ірраціональні корені (показник кореня дорівнює порядковому числу рівняння, тобто найвищому степеню невідомого) обчислювач називав *первісними коренями* рівняння.

Третій розділ роботи Я.П. Кулика присвячений з’ясуванню та знаходженню трансцендентних коренів кубічних рівнянь. Якщо, за допомогою вище описаних методів, встановлено, що кубічне рівняння не має ні раціонального, ні ірраціонального, ні уявного коренів, тоді потрібно шукати трансцендентні розв’язки. Автор розглядав два випадки:

1) всі три трансцендентні корені є дійсними;
2) один із коренів є дійсний, а два інших – уявні.

Для знаходження трансцендентних коренів кубічних рівнянь Кулик пропонував використовувати метод апроксимації. Автор для наближеного знаходження коренів удосконалив таблицю Ламберта, недоліком якої був той факт, що елементи в таблиці знаходилися далеко один від одного. Дана ситуація вела до появи деякої похибки під час розв’язування рівнянь. Кулик заново розрахував таблицю, збільшивши вдесятеро кількість значень таблиці, зблизив вдесятеро її аргументи. Так, як тригонометричні обчислення для другого випадку (з одним дійсним коренем) за допомогою звичайних тригонометричних таблиць були не зовсім точними, Кулик знову розширив відповідні таблиці, поглиблюючи їх, зробив більш придатними для використання. Він розробив метод знаходження трансцендентних коренів, побудував об’ємні таблиці „Рівняння з трьома дійсними коренями“, які охоплюють велику кількість рівнянь. Значення в таблицях Кулик обчислив десятковими дробами, які мають сім знаків після коми.

Метод, який описав Кулик, для знаходження наближених коренів є достатньо зрозумілим. Крім того, за допомогою таблиць досягається його зручність та практичність.

Я.П. Кулик пропонує відповідне рівняння

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (1)$$

за допомогою підстановки

x=y-1/3A

зводити до рівняння вигляду:

$$y^3 + Py + Q = 0\,, \qquad (7)$$

в якому

$P = B - \frac{1}{3}A^2$, $\quad Q = C - \frac{1}{3}AB + \frac{2}{27}A^3$ (коефіцієнти P та Q можуть приймати від’ємні значення).

Потім рівняння (7) за допомогою замін

$$y = z \cdot \sqrt{p} \quad \text{і} \quad \frac{Q}{P\sqrt{P}} = R$$

потрібно звести до рівняння

$$z^3 + z = \pm R\ . \qquad (8)$$

Дійсність трьох коренів рівняння (8) потребує позитивного детермінанта, при цьому знак *z* повинен бути від’ємним. В результаті рівняння буде мати вигляд:

$$z^3 - z = \pm R. \qquad (9)$$

Основне дослідження зводиться до знаходження коренів рівняння (9), а потім до обчислення відповідних корені початкового рівняння (1). Обчислення не прості та досить об’ємні, але, за словами автора, найбільш точні.

Нехай *a,b,c* – три дійсних, згідно їх числових значень, упорядковані корені рівняння (9), відповідно $a > b > c$, тоді $a + b + c = 0$ (A=0). Отже, $a = -(b + c)$, а це означає, що обидва менші корені мають однакові знаки, які протиставляються знакові найбільшого кореня. Отже, якщо найбільший корінь – додатний, то обидва інших є від’ємними, а якщо найбільший корінь – від’ємний, то обидва інших є додатними. Значення *a* та R одночасно є від’ємними, або ж додатними, відповідно до такої ситуації визначаються знаки трьох коренів рівняння (9).

Для знаходження відрізку, в якому лежать корені рівняння (9) дане рівняння потрібно продиференціювати, отримаємо:

$$3z^2 - 1 = 0\,,$$

Звідси, $z = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773503$, а $R = \sqrt{\frac{4}{27}} = 0{,}3849002$.

Дане значення *R* – найбільше значення, при якому рівняння (9) буде мати три дійсні корені, а значення 0,5773503 – це найбільше значення, яке може прийняти найменший корінь рівняння (9). Корені автор поділяв на найменший, середній та найбільший. За значенням *R* легко визначається кількість дійсних коренів рівняння (1): якщо *R*<0,3849002 – рівняння має три дійсні корені, якщо *R*>0,3849002 – один дійсний корінь.

Таблиці, побудовані Я.П. Куликом для знаходження трьох дійсних коренів, мають три колонки, перша з яких показує значення *z* від *z*=0 до *z*=0,5774, друга від *z*=0,5774 до *z*=1,000, третя – від *z*=1,000 до *z*=1,155. Решта таблиць, які побудовані для *z* від *z*=1,555 до *z*=3,2800, відноситься до другого випадку рівняння (9) з одним дійсним та двома уявними коренями. Друга частина таблиці містить як дійсний, так і відповідно пару комплексно спряжених коренів. Називаються таблиці „Рівняння з одним дійсним коренем“.

Таблиці для знаходження трьох дійсних коренів автор поділяв на три види:

а) „Рівняння з трьома дійсними коренями. Найменший корінь“,

б) „Рівняння з трьома дійсними коренями. Середній корінь“,

в) „Рівняння з трьома коренями. Найбільший корінь“ (додаток Р) .

Таблиці, складені Куликом, розміщуються більше як на 50 сторінках роботи. Вони містять великий об’єм проведених підрахунків, створюють зручну практичну базу для розв’язування кубічних рівнянь.

Знайдене наближене значення кореня рівняння (9) вимагає послідовних математичних операцій для отримання відповідного кореня рівняння (1). Потрібно здійснити поетапне обчислення коренів рівнянь (1), використовуючи заміни:

$$y = z\sqrt{P}\ ; \qquad x = y - \frac{1}{3}A\,.$$

Яків Кулик для знаходження наближеного значення коренів пропонував обрахунки не за допомогою складних ірраціональних виразів, а використовуючи логарифми. До того, таблиці значень логарифмів були складені самим автором з великою точністю.
Наприклад, потрібно розв’язати рівняння:

$$y^3 - 7y + 7 = 0$$

Відповідне значення $R = \frac{-7}{7\sqrt{7}} \approx -0{,}3779644$ – рівняння має три дійсні корені.

В таблицях знаходяться значення z. Користування таблицями зовсім просте. У всіх трьох таблицях („Найменший корінь“, „Середній корінь“, „Найбільший корінь“) відповідні корені знаходяться навпроти значення R.

Для даного рівняння:

$$z_1 = 0{,}5128583; \quad z_2 = 0{,}6395241; \quad z_3 = -1{,}1523824\,.$$

Після перетворень (з використанням логарифмів) підраховуються корені початкового рівняння.

$$y_1 = 1{,}356895\,; \quad y_2 = 1{,}692021; \quad y_3 = -3{,}048916\,.$$

Звичайно, що обчислення складних ірраціональностей є більш точними під час використання таблиць логарифмів. З них легко знаходяться, як значення логарифмів, так і відповідні числові значення аргументів. Якщо, врахувати ще й точність таблиць логарифмів Я.П. Кулика, тоді можна стверджувати, що при таких наближених обчисленнях досягається найменша похибка.

Висновки. Методи розв’язування алгебраїчних рівнянь, математичні таблиці Я.П. Кулика збагачують теоретичну та практичну бази теорії алгебраїчних рівнянь. Теоретична частина аналізу структури коренів, їх закономірностей, основних властивостей може служити підґрунтям для подальших досліджень, темами наукових робіт учнів та студентів. Збережені до нинішнього часу масштабні таблиці можуть використовуватися як в навчальному процесі так і безпосередньо під час розв’язування кубічних рівнянь, для цього достатньо залучити електронні ресурси. Комп’ютерне користування математичними таблицями може забезпечити раціональне знаходження наближених значень коренів рівнянь, що вимагають громіздких обчислень.

1. Porubsky S. Jakov Philip Kulik – ein vergesener Rehenkünstler / Porubsky S. [Tagung zur Geschichte der Matchematik]. – Augsburg, 2004. – S. 307-328.

2. Porubsky S. Jakov Philip Kuliks Wirken in Graz, in Christa Binder and Detlef Gronau / S. Porubsky, B. Besser [Beiträge zur Geschichte der Mathematik] – Graz, 2010 – S. 1 – 30.

3. Moravec L. Seznameni s Jakubem Filipem Kulikem / L. Moravec., J.M Becvarova, J. Becvar [XXX mezinarodni konference Historie matematiky] – Praha, 2009. – S. 156 – 163.

4. Moravec L. Jakub Filip Kulik – Life and Work / L. Moravec // WDS’09 Proceedings of Contributed Papers. – Praha, 2009. – [V.1] S. 182-187.

5. Лісковець С.М. Про дослідження маловідомих наукових праць Якова Пилипа Кулика / С.М. Лісковець // Вісник Нац. тех. ун-ту «Харківський політехнічний інститут»: зб. Наук. пр. Сер. «Історія науки і техніки». – Х.: НТУ «ХПІ», 2011. - №1. – С. 145-152.

6. Kulik J.P. Beiträge zur Auflösung Höherer Gleihungen überhaupt und der kubischen Gleihungen insbesondere / J.P. Kulik – Prag, 1860. – 103 s.