УДК 517.926
Дутчак Б.І., Михальчук Р.І.
Луцький національний технічний університет

СИНТЕЗ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЯКИХ ОПИСУЮТЬСЯ ЗВИЧАЙНИМИ ЛІНІЙНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Дутчак Б.І., Михальчук Р.І. Синтез параметричних систем, математичні моделі яких описуються звичайними лінійними диференціальними рівняннями із змінними коефіцієнтами. Запропонований алгоритм синтезу параметричних систем, які можна описати звичайними лінійними диференціальними рівняннями із змінними коефіцієнтами. Ці рівняння можуть бути про інтегровані шляхом зведення їх до рівнянь з постійними коефіцієнтами. Отримано формули для коефіцієнтів диференціальних рівнянь, які описують такі параметричні системи.

Ключові слова: синтез, моделювання, диференціальні рівняння, перетворення Ляпунова.
Форм. 15. Літ. 4.

Дутчак Б.И., Михальчук Р.И. Синтез параметрических систем, математические модели которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Предложен алгоритм синтеза параметрических систем, которые можно описать обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Эти уравнения могут быть проинтегрированы путем приведения их к уравнениям с постоянными коэффициентами. Получены формулы для коэффициентов дифференциальных уравнений, которые описывают такие параметрические системы.

Ключевые слова: синтез, моделирование, дифференциальные уравнения, преобразование Ляпунова.

Dutchak B., Mykhalchuk R. Synthesis of parametric systems, whose mathematical models are described by ordinary linear differential equations with variable coefficients. The algorithm for synthesis of parametric systems that can be described by ordinary linear differential equation with variable coefficients is presented in this paper. These equations can be integrated by reducing to equations with constant coefficients. It is obtained formulas for the coefficients of the differential equations that describe these parametric systems.

Keywords: synthesis, modeling, differential equations, Lyapunov transformation.

Вступ. Коливання механічних систем з постійними масою або коефіцієнтом жорсткості до теперішнього часу досліджені достатньо ретельно. Але, якщо змінними є хоча б один із згаданих параметрів системи, то дослідження таких коливань викликає великі труднощі. Прийнято рахувати, що подібні закони руху описуються аналітично досить складно, і тому наближені розв’язки зводять до визначення стійких і нестійких зон руху.

В той же час такі важливі характеристики як періоди коливань, їх амплітуди, швидкості і т.д. до цих пір, як правило, не розглядались. Однак, існують деякі закони визначення маси системи або її коефіцієнта жорсткості, які дозволяють повністю описати і провести аналіз поведінки таких коливальних рухів. Математичні моделі таких систем описуються лінійними диференціальними рівняннями n-го порядку із змінними коефіцієнтами. Розроблено спосіб зведення таких рівнянь до рівнянь з постійними коефіцієнтами, розв’язування яких достатньо добре вивчено. Дана задача є актуальною тому що математичні моделі більшості динамічних процесів, якими описуються реальні системи є диференціальними рівняннями із змінними коефіцієнтами. При розв’язуванні лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків із змінними коефіцієнтами виникають значні проблеми на противагу, коли диференціальне рівняння має постійні коефіцієнти.

Постановка задачі. Розглянемо систему яка описується однорідним диференціальним рівняння n-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y(x)=0, \quad (1)$$

де коефіцієнти $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ – деякі функції дійсної змінної, визначені на $x\in[\alpha;\beta]$ (в деяких випадках α і β можуть бути і невластивими числами, $x\in R$), причому $a_0(x)\neq 0$ для $\forall x\in[\alpha;\beta]$. Ввівши вектор-функцію $Y(x)=colon\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}};\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}};\ldots;\frac{dy}{dx};y(x)\right)$ та матрицю

$$A(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} & -\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} & -\dfrac{a_3(x)}{a_0(x)} & \Lambda & -\dfrac{a_{n-2}(x)}{a_0(x)} & -\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)} & -\dfrac{a_n(x)}{a_0(x)} \\ 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \Lambda & & \Lambda & & \Lambda & \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

рівняння (1) запишемо у вигляді однорідної системи

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y\,. \tag{2}$$

Як відомо [1], розв’язок системи (2) так і відповідної неоднорідної системи

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y+f(x)$$

може бути поданий через матрицант, зображений у вигляді ряду. Однак, при обчисленні матриціанту виникають певні труднощі при використанні цих результатів в інженерній практиці. Відомо, що розв’язок системи (2) можна знайти іншим шляхом у випадку, якщо вона є звідною в змісті А.М.Ляпунова [1]. Однак процес знаходження перетворення Ляпунова приводить до необхідності розв’язування матричного рівняння, що також є досить складною задачею.

Основна частина. У зв’язку з цим розглянемо обернену задачу а саме задачу синтезу: визначимо вигляд функцій $a_0(x), a_1(x), K\,, a_n(x)$ (а отже і вигляд диференціального рівняння і математичної моделі системи), при яких рівняння (1) є звідним при застосуванні деякого нелінійного перетворення незалежної змінної, наприклад

$$z=x^2, \tag{3}$$

де $z\in R^+$.

Безпосереднім диференціюванням, як показано в [2], виразимо похідні в рівнянні (1) через нову змінну z :

$$\frac{dy}{dx}=2z^{1/2}\frac{dy}{dz},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4\left(z\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{2}\frac{dy}{dz}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=8\left(z^{3/2}\frac{d^3y}{dz^3}+\frac{3}{2}z^{1/2}\frac{d^2y}{dz^2}\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=16\left(z^2\frac{d^4y}{dz^4}+3z\frac{d^3y}{dz^3}+\frac{3}{4}\frac{d^2y}{dz^2}\right),$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=32\left(z^{3/2}\frac{d^5y}{dz^5}+5z^{3/2}\frac{d^4y}{dz^4}+\frac{15}{4}z^{1/2}\frac{d^3y}{dz^3}\right).$$

Можна показати [3], що при використанні заміни (3) похідні $\dfrac{d^{2k-1}y}{dx^{2k-1}}$ і $\dfrac{d^{2k}y}{dx^{2k}}$ будуть мати відповідно вигляд:

$$\frac{d^{2k-1}y}{dx^{2k-1}}=2^{2k-1}\left(z^{k-\frac{1}{2}}\frac{d^{2k-1}y}{dz^{2k-1}}+A_1^{2k-1}z^{k-\frac{3}{2}}\frac{d^{2k-2}y}{dz^{2k-2}}+A_2^{2k-1}z^{k-\frac{5}{2}}\frac{d^{2k-3}y}{dz^{2k-3}}+\right.$$
$$\left.+K+A_{k-2}^{2k-1}z^{3/2}\frac{d^{k+1}y}{dz^{k+1}}+A_{k-1}^{2k-1}z^{1/2}\frac{d^ky}{dz^k}\right), \tag{4}$$

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} = 2^{2k}\left(z^k \frac{d^{2k}y}{dz^{2k}} + B_1^{2k} z^{k-1} \frac{d^{2k-1}y}{dz^{2k-1}} + B_2^{2k} z^{k-2} \frac{d^{2k-2}y}{dz^{2k-2}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + B_{k-1}^{2k} z \frac{d^{k+1}y}{dz^{k+1}} + B_k^{2k} \frac{d^k y}{dz^k} \right), \tag{5}$$

де $A_1^{2k-1}, A_2^{2k-1}, \ldots, A_{k-1}^{2k-1}, B_1^{2k}, B_2^{2k}, \ldots, B_{k-1}^{2k}, B_k^{2k}$ – постійні коефіцієнти, де нижній індекс показує номер коефіцієнта, а верхній – порядок похідної у формулі, в якій присутній коефіцієнт. Слід зауважити, що кількість членів у сумі, яка зображає n- ну похідну, дорівнює $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, де n – порядок похідної, а $\left[\frac{n}{2}\right]$ – ціла частина.

Легко бачити, що A_i^{2k-1} та B_j^{2k}, де $i=\overline{1,k-1}$, $j=\overline{1,k}$ зв'язані системою k лінійних рівнянь

$$\begin{cases} B_1^{2k} = k - \frac{1}{2} + A_1^{2k-1}, \\ B_2^{2k} = A_1^{2k-1}\left(k - \frac{3}{2}\right) + A_2^{2k-1}, \\ B_3^{2k} = A_2^{2k-1}\left(k - \frac{5}{2}\right) + A_3^{2k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{k-1}^{2k} = \frac{3}{2} A_{k-2}^{2k-1} + A_{k-2}^{2k-1}, \\ B_k^{2k} = \frac{1}{2} A_{k-1}^{2k-1}, \end{cases} \tag{6}$$

з розв'язку якої можуть бути виписані явні формули (4) та (5) для похідних довільного порядку.
Не зменшуючи загальності припустимо, що в рівнянні (1) $n = 2k$. Тоді, підставивши (4) та (5) в (1) будемо мати

$$a_0(x)\cdot 2^{2k}\left(z^k \frac{d^{2k}y}{dz^{2k}} + B_1^{2k} z^{k-1} \frac{d^{2k-1}y}{dz^{2k-1}} + B_2^{2k} z^{k-2} \frac{d^{2k-2}y}{dz^{2k-2}} + B_3^{2k} z^{k-3} \frac{d^{2k-3}y}{dz^{2k-3}} + \right.$$
$$\left. + \ldots + B_{k-1}^{2k} z \frac{d^{k+1}y}{dz^{k+1}} + B_k^{2k} \frac{d^k y}{dz^k} \right) + a_1(x)\cdot 2^{2k-1}\left(z^{k-\frac{1}{2}} \frac{d^{2k-1}y}{dz^{2k-1}} + A_1^{2k-1} z^{k-\frac{3}{2}} \frac{d^{2k-2}y}{dz^{2k-2}} + \right.$$
$$\left. + A_2^{2k-1} z^{k-\frac{5}{2}} \frac{d^{2k-3}y}{dz^{2k-3}} + \ldots + A_{k-2}^{2k-1} z^{3/2} \frac{d^{k+1}y}{dz^{k+1}} + A_{k-2}^{2k-1} z^{1/2} \frac{d^k y}{dz^k} \right) +$$
$$+ a_2(x)\cdot 2^{2k-2}\left(z^{k-1} \frac{d^{2k-2}y}{dz^{2k-2}} + B_1^{2k-2} z^{k-2} \frac{d^{2k-3}y}{dz^{2k-3}} + \ldots + B_{k-1}^{2k-2} \frac{d^{k-1}y}{dz^{k-1}} \right) +$$
$$+ a_3(x)\cdot 2^{2k-3}\left(z^{k-\frac{3}{2}} \frac{d^{2k-3}y}{dz^{2k-3}} + \ldots + A_{k-2}^{2k-3} z^{1/2} \frac{d^{k-1}y}{dz^{k-1}} \right) +$$
$$+ a_{2k-2}(x)\cdot 4\left(z \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} \right) + a_{2k-1}(x)\cdot 2z^{1/2} \frac{dy}{dz} + a_{2k}(x) y(z) = 0 .$$

Згрупувавши члени з похідними однакового порядку, отримаємо

$$a_0(x)\cdot 2^{2k} z^k \frac{d^{2k}y}{dz^{2k}} + \left[a_0(x)\cdot 2^{2k} B_1^{2k} z^{k-1} + a_1(x)\cdot 2^{2k-1} z^{k-\frac{1}{2}}\right]\frac{d^{2k-1}y}{dz^{2k-1}} +$$

$$+\left[a_0(x)\cdot 2^{2k} B_2^{2k} z^{k-2} + a_1(x)\cdot 2^{2k-1} A_1^{2k-1} z^{k-\frac{3}{2}} + a_2(x)\cdot 2^{2k-2} z^{k-1}\right]\frac{d^{2k-2}y}{dz^{2k-2}} +$$

$$+\left[a_0(x)\cdot 2^{2k} B_3^{2k} z^{k-3} + a_1(x)\cdot 2^{2k-1} A_2^{2k-1} z^{k-\frac{5}{2}} + a_2(x)\cdot 2^{2k-2} B_1^{2k-2} z^{k-2} +\right.$$

$$\left. + a_3(x)\cdot 2^{2k-3} z^{k-\frac{3}{2}}\right]\frac{d^{2k-3}y}{dz^{2k-3}} + \ldots + \left[a_{2k-3}(x)\cdot 2^3\cdot\frac{3}{2} z^{1/2} + a_{2k-2}(x)\cdot 2^2 z\right]\times$$

$$\times\frac{d^2y}{dz^2} + \left[a_{2k-2}(x)\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2} + a_{2k-1}(x)\cdot 2z^{1/2}\right]\frac{dy}{dz} + a_{2k}(x)y(z) = 0. \quad (7)$$

Для того, щоб рівняння (7) було звідним, необхідно щоб коефіцієнти біля функції $y(z)$ та її похідних були сталими. Позначимо їх через $m_0, m_1, \ldots, m_{2k}$. При цьому $m_0 = 2^{2k} a_0(x) z^k$ і врахувавши (3), будемо мати

$$a_0(x) = \frac{m_0}{2^{2k} x^{2k}}. \quad (8)$$

Прийнявши, що $m_1 = 2^{2k} a_0(x) B_1^{2k} z^{k-1} + 2^{2k-1} a_1(x) z^{k-\frac{1}{2}}$ і врахувавши (3) та (8), отримаємо

$$a_1(x) = \frac{1}{2^{2k-1}}\left(\frac{m_1}{x^{2k-1}} - \frac{m_0 B_1^{2k}}{x^{2k+1}}\right). \quad (9)$$

Далі покладемо

$$m_2 = 2^{2k} a_0(x) B_2^{2k} z^{k-2} + a_1(x)\cdot 2^{2k-1} A_1^{2k-1} z^{k-\frac{3}{2}} + a_2(x)\cdot 2^{2k-2} z^{k-1},$$

$$m_3 = 2^{2k} a_0(x) B_3^{2k} z^{k-3} + 2^{2k-1} a_1(x) A_2^{2k-1} z^{k-\frac{5}{2}} + 2^{2k-2} a_2(x) B_1^{2k-2} z^{k-2} +$$

$$+ 2^{2k-3} a_3(x) z^{k-\frac{3}{2}}$$

і знайдемо

$$a_2(x) = \frac{1}{2^{2k-2}}\left(\frac{m_2}{x^{2k-2}} - \frac{m_1 A_1^{2k-1}}{x^{2k}} - \frac{m_0\left(B_2^{2k} - B_1^{2k} A_1^{2k-1}\right)}{x^{2k+2}}\right), \quad (10)$$

$$a_3(x) = \frac{1}{2^{2k-3}}\left(\frac{m_3}{x^{2k-3}} - \frac{m_2 B_1^{2k-2}}{x^{2k-1}} - \frac{m_1\left(A_2^{2k-1} - A_1^{2k-1} B_1^{2k-2}\right)}{x^{2k+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{m_0\left(B_1^{2k-2}\left(B_1^{2k} A_1^{2k-1} - B_0^{2k}\right) - A_2^{2k-1} B_1^{2k}\right)}{x^{2k+3}}\right). \quad (11)$$

Аналогічно визначаються коефіцієнти $a_4(x), \ldots, a_{n-1}(x)$. І, нарешті, покладемо $a_{2k}(x) = m_{2k}$.
Для спрощення записів коефіцієнти (8) – (11) запишемо у вигляді

$$a_0(x)=\frac{b_{2k}^0}{x^{2k}};\quad a_1(x)=\frac{b_{2k-1}^1}{x^{2k-1}}+\frac{b_{2k+1}^1}{x^{2k+1}};\quad a_2(x)=\frac{b_{2k-2}^2}{x^{2k-2}}+\frac{b_{2k}^2}{x^{2k}}+\frac{b_{2k+2}^2}{x^{2k+2}};$$
$$a_3(x)=\frac{b_{2k-3}^3}{x^{2k-3}}+\frac{b_{2k-1}^3}{x^{2k-1}}+\frac{b_{2k+1}^3}{x^{2k+1}}+\frac{b_{2k+3}^3}{x^{2k+3}},$$

(12)

де b_i^j – константи, верхній індекс яких співпадає з номером коефіцієнта $a_j(x)$, а нижній індекс, з показником степеня функції x^i, яка знаходиться в знаменнику відповідного доданку. З (8) – (11) встановимо вигляд цих констант

$$b_{2k}^0=\frac{m_0}{2^{2k}};\quad b_{2k-1}^1=\frac{m_1}{2^{2k-1}};\quad b_{2k+1}^1=-\frac{m_0B_1^{2k}}{2^{2k-1}};\quad b_{2k-2}^2=\frac{m_2}{2^{2k-2}};\quad b_{2k}^2=-\frac{m_1A_1^{2k-1}}{2^{2k-2}};$$
$$b_{2k+2}^2=-\frac{m_0\left(B_2^{2k}-B_1^{2k}A_1^{2k-1}\right)}{2^{2k-2}};\quad b_{2k-3}^3=\frac{m_3}{2^{2k-3}};\quad b_{2k-1}^3=-\frac{m_2B_1^{2k-2}}{2^{2k-3}};$$
$$b_{2k+1}^3=-\frac{m_1\left(A_2^{2k-1}-A_1^{2k-1}B_1^{2k-2}\right)}{2^{2k-3}};\quad b_{2k+3}^3=-\frac{m_0\left(B_1^{2k-2}\left(B_1^{2k}A_1^{2k-1}\right)-A_2^{2k-1}B_1^{2k}\right)}{2^{2k-3}}.$$

(13)

Висновок. Таким чином, якщо параметрична система описується рівняння (1) яке має вигляд

$$\frac{b_{2k}^0}{x^{2k}}\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}}+\left(\frac{b_{2k-1}^1}{x^{2k-1}}+\frac{b_{2k+1}^1}{x^{2k+1}}\right)\frac{d^{2k-1}y}{dx^{2k-1}}+\left(\frac{b_{2k-2}^2}{x^{2k-2}}+\frac{b_{2k}^2}{x^{2k}}+\frac{b_{2k+2}^2}{x^{2k+2}}\right)\frac{d^{2k-2}y}{dx^{2k-2}}+$$
$$+\left(\frac{b_{2k-3}^3}{x^{2k-3}}+\frac{b_{2k-1}^3}{x^{2k-1}}+\frac{b_{2k+1}^3}{x^{2k+1}}+\frac{b_{2k+3}^3}{x^{2k+3}}\right)\frac{d^{2k-3}y}{dx^{2k-3}}+\ldots+b_ey(x)=0,$$

(14)

то воно є звідним за допомогою нелінійного перетворення незалежної змінної $z=x^2$, і зводиться до лінійного однорідного диференціального рівняння порядку $2k$

$$m_0\frac{d^{2k}y}{dz^{2k}}+m_1\frac{d^{2k-1}y}{dz^{2k}}+\ldots+m_{2k-1}\frac{dy}{dz}+m_{2k}y(z)=0.$$

(15)

Знаходження розв’язку $y(z)$ рівняння (15) є загально відомим [4]. Знайшовши його, і використавши (3) знайдемо загальний розв’язок $y(x)$ рівняння (14).

Приклад: Описати процес, який відбувається в системі із змінними параметрами математична модель якої описується диференціальним рівнянням

$$\frac{1}{16x^4}\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{3}{8x^5}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{15}{16x^6}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{15}{16x^7}\frac{dy}{dx}-16y(x)=0.$$

(П.1)

Легко бачити, що рівняння (П.1) є частковим випадком рівняння (14) при $k=2$; $b_{2k}^0=\frac{1}{16}$; $b_{2k-1}^1=0$; $b_{2k+1}^1=-\frac{3}{8}$; $b_{2k-1}^2=b_{2k}^2=0$; $b_{2k+2}^2=\frac{15}{16}$; $b_{2k-3}^3=b_{2k-1}^3=b_{2k+1}^3=0$; $b_{2k+3}^3=-\frac{15}{16}$; $b_e=-16$.

Провівши прості обчислення, будемо мати, що $m_0=1$, $m_1=m_2=m_3=0$, $m_4=-16$, тобто в даному прикладі рівняння (15) прийме вигляд

$$\frac{d^4y}{dz^4}-16y(z)=0.$$

(П.2)

Корені відповідного характеристичного рівняння $k^4 - 16 = 0$ рівні $k_1 = 2$; $k_2 = -2$; $k_3 = 2i$; $k_4 = -2i$, тому його загальний розв'язок

$$y(z) = C_1 e^{2z} + C_2 e^{-2z} + C_3 \cos 2z + C_4 \sin 2z\ . \tag{П.3}$$

Підставивши в (П.3) $z = x^2$, отримаємо загальний розв'язок рівняння (П.1)

$$y(z) = C_1 e^{2x^2} + C_2 e^{-2x^2} + C_3 \cos\left(2x^2\right) + C_4 \left(\cos 2x^2\right).$$

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552с.
2. Кислий О.О., Дутчак Б.І. Інтегрування деяких лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку із змінними коефіцієнтами. Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямком «Інженерна механіка») Вип. 11, част. 2, Луцьк, 2002, ст.. 28-34
3. Кислий О.О., Дутчак Б.І. З приводу розв'язування деяких лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку.// Десята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня 2004 р., Київ, матеріали конференції . стор. 125.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720с.