

УДК 517.926

Б.І.Дутчак

Луцький національний технічний університет

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ  
З ДОПОМОГОЮ ПІДСТАНОВОК  $\sin x = e^z$  ТА  $\cos x = e^{-z}$**

Розглядаються звичайні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, які можуть бути проінтегровані, шляхом зведення їх до рівнянь з постійними коефіцієнтами.

**Ключові слова:** диференціальні рівняння, перетворення Лапласа, визначальна функція, слід, визначник.

**§1. Однорідні рівняння**

Для забезпечення прозорості викладок розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння третього порядку із змінними коефіцієнтами

$$a_0(x) \frac{d^3 y}{dx^3} + a_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2(x) \frac{dy}{dx} + a_3(x) y(x) = 0, \quad (1.1)$$

де коефіцієнти  $a_i(x)$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) - деякі неперервні функції дійсної змінної  $x$ , визначені на проміжку  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Визначимо вигляд коефіцієнтів, при яких рівняння (1.1) може бути розв'язане за допомогою підстановки

$$\sin x = e^z. \quad (1.2)$$

З (1.2) знайдемо

$$z = \ln \sin x \quad \text{і} \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{ctgx} = (e^{-2z} - 1)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Безпосереднім диференціюванням, враховуючи (1.3), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} (e^{-2z} - 1)^{1/2}; \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dz^2} (e^{-2z} - 1) - \frac{dy}{dz} e^{-2z}; \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d^3 y}{dz^3} (e^{-2z} - 1)^{3/2} - 3 \frac{d^2 y}{dz^2} e^{-2z} (e^{-2z} - 1)^{1/2} + 2 \frac{dy}{dz} e^{-2z} (e^{-2z} - 1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Підставивши (1.4) в (1.1), будемо мати

$$\begin{aligned} a_0(x) \left[ \frac{d^3 y}{dz^3} (e^{-2z} - 1)^{3/2} - 3 \frac{d^2 y}{dz^2} e^{-2z} (e^{-2z} - 1)^{1/2} + 2 \frac{dy}{dz} e^{-2z} (e^{-2z} - 1)^{1/2} \right] + \\ + a_1(x) \left[ \frac{d^2 y}{dz^2} (e^{-2z} - 1) - \frac{dy}{dz} e^{-2z} \right] + a_2(x) \frac{dy}{dz} (e^{-2z} - 1)^{1/2} + a_3(x) y(x) = 0. \end{aligned}$$

Привівши подібні члени, останнє рівняння перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dz^3} \left[ a_0(x) (e^{-2z} - 1)^{3/2} \right] + \frac{d^2 y}{dz^2} \left[ -3a_0(x) e^{-2z} (e^{-2z} - 1)^{1/2} + a_1(x) (e^{-2z} - 1) \right] + \\ + \frac{dy}{dz} \left[ 2a_0(x) e^{-2z} (e^{-2z} - 1)^{1/2} - a_1(x) e^{-2z} + a_2(x) (e^{-2z} - 1)^{1/2} \right] + a_3(x) y(z) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В останньому рівнянні функцію  $y$  вважають залежною від змінної  $z$ .

При цьому приймемо, що

$$\begin{cases} a_0(x)(e^{-2z} - 1) = C_0; \\ -3a_0(x)e^{-2z}(e^{-2z} - 1)^{1/2} + a_1(x)(e^{-2z} - 1) = C_1; \\ 2a_0(x)e^{-2z}(e^{-2z} - 1)^{1/2} - a_1(x)e^{-2z} + a_2(x)(e^{-2z} - 1)^{1/2} = C_2; \\ a_3(x) = C_3; \end{cases} \quad (1.6)$$

де  $C_i$ ,  $(i = \overline{0,3})$  - довільні константи. З системи (1.6), враховуючи (1.3), знайдемо коефіцієнти  $a_i(x)$ ,  $(i = \overline{0,3})$ :

$$\begin{cases} a_0(x) = C_0 \operatorname{tg}^3 x; \\ a_1(x) = \left( C_1 + \frac{3C_0}{\cos^2 x} \right) \operatorname{tg}^2 x; \\ a_2(x) = \left\{ C_2 + \frac{1}{\cos^2 x} \left[ C_1 + C_0 \left( \frac{3}{\cos^2 x} - 2 \right) \right] \right\} \operatorname{tg} x; \\ a_3(x) = C_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

Використавши (1.7), перепишемо рівняння (1.5) у вигляді

$$\begin{aligned} C_0 \operatorname{tg}^3 x \frac{d^3 y}{dx^3} + \left( C_1 + \frac{3C_0}{\cos^2 x} \right) \operatorname{tg}^2 x \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ + \left\{ C_2 + \frac{1}{\cos^2 x} \left[ C_1 + C_0 \left( \frac{3}{\cos^2 x} - 2 \right) \right] \right\} \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} + C_3 y(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отже, рівняння (1.8) за допомогою підстановки  $\sin x = e^z$  приводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами відносно функції  $y(z)$

$$C_0 \frac{d^3 y}{dz^3} + C_1 \frac{d^2 y}{dz^2} + C_2 \frac{dy}{dz} + C_3 y(z) = 0, \quad (1.9)$$

розв'язування якого є відомим. А перейшовши до вихідної змінної  $x$ , отримаємо шуканий розв'язок  $y(x)$ .

Поступаючи аналогічно, можна побудувати диференціальні рівняння вище третього порядку, які розв'язуються за допомогою підстановки (1.2).

## §2. Неоднорідні рівняння

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку з змінними коефіцієнтами

$$a_0(x) \frac{d^3 y}{dx^3} + a_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y(x) = f(x), \quad (2.1)$$

де  $x \in \left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$ .

Відомо [1], що загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і окремого розв'язку неоднорідного рівняння. Відповідним однорідним рівнянням є рівняння (1.1). За допомогою підстановки (1.2) приведемо його до рівняння з постійними коефіцієнтами (1.9), відносно незалежної змінної  $z$ , загальний розв'язок  $y_{zo}(z)$  якого може бути записаний у вигляді

$$y_{zo}(z) = K_1 y_1(z) + K_2 y_2(z) + K_3 y_3(z), \quad (2.2)$$

де  $K_i$  та  $y_i(z)$ ,  $(i = \overline{1,3})$  відповідно довільні константи та лінійно незалежні розв'язки рівняння (1.9).

Виразивши праву частину рівняння (2.1) через змінну  $z$  переходимо до рівняння

$$C_0 \frac{d^3 y}{dz^3} + C_1 \frac{d^2 y}{dz^2} + C_2 \frac{dy}{dz} + C_3 y(z) = \varphi(z). \quad (2.3)$$

Окремий розв'язок  $y_{он}(z)$  цього рівняння знаходять відомим способом. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння  $y(z)$  буде мати вигляд

$$y(z) = y_{зо}(z) + y_{он}(z). \quad (2.4)$$

Перейшовши в (2.4) до змінної  $x$  отримуємо загальний розв'язок рівняння (2.1).

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$tg^3 x \frac{d^3 y}{dx^3} + tg^2 x \left( \frac{3}{\cos^2 x} - 1 \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + tgx \left( \frac{3tg^2 x}{\cos^2 x} - 2 \right) \frac{dy}{dx} = 4 \sin x \quad (П1.1)$$

на інтервалі  $x \in \left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$ .

**Розв'язування.** Очевидно, що структура відповідного однорідного рівняння співпадає з структурою рівняння (1.8). Отже, можна застосувати підстановку (1.2). Коефіцієнти  $C_i$ ,  $(i = \overline{0,2})$

обчислюємо з системи (1.6), враховуючи, що  $e^{-2z} - 1 = ctgx$ :

$$C_0 = a_0(x) \cdot ctg^3 x = tg^3 x \cdot ctg^3 x = 1$$

$$C_1 = tg^2 x \left( \frac{3}{\cos^2 x} - 1 \right) ctg^2 x - 3 \frac{tg^3 x}{\sin^2 x} ctgx = -1$$

$$C_2 = \frac{2tg^3 x \cdot ctgx}{\sin^2 x} - \frac{tg^2 x}{\sin^2 x} \left( \frac{3}{\cos^2 x} - 1 \right) + tgx \left( \frac{3tg^2 x}{\cos^2 x} - 2 \right) ctgx = -2$$

і поклавши  $C_3(x) = 0$ , будемо мати  $C_3 = 0$ . Тоді відповідне однорідне рівняння відносно змінної  $z$  буде мати вигляд

$$\frac{d^3 y}{dz^3} - \frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} = 0.$$

Очевидно, що його загальним розв'язком є

$$y_{зо}(z) = K_1 + K_2 e^{2z} + K_3 e^{-z}.$$

Враховуючи підстановку (1.2), представимо праву частину рівняння (П1.1) у вигляді  $4e^z$  і розглянемо неоднорідне рівняння

$$\frac{d^3 y}{dz^3} - \frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} = 4e^z. \quad (П1.2)$$

Окремим розв'язком цього рівняння буде  $y_{он}(z) = -2e^z$ .

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (П1.2) буде мати вигляд

$$y(z) = K_1 + K_2 e^{2z} + K_3 e^{-z} - 2e^z.$$

Використавши підстановку  $e^z = \sin x$ , отримаємо загальний розв'язок рівняння (П1.1)

$$y(x) = K_1 + K_2 \sin^2 x + \frac{K_3}{\sin x} - 2 \sin x.$$

### §3. Підстановка $\cos x = e^{-z}$

Очевидно, що підстановка (1.2) відображає проміжок  $x \in \left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$  в інтервал  $z \in (-\infty; 0)$ .

Отже, рівняння (1.9) розв'язується на інтервалі  $(-\infty; 0)$ , що не є загальноприйнятим. В зв'язку з цим розглянемо підстановку

$$\cos x = e^{-z}, \quad (3.1)$$

яка відображає проміжок  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  в інтервал  $z \in (0; +\infty)$ . З (3.1) знайдемо

$$z = -\ln \cos x \quad \text{і} \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} x = (e^{2z} - 1)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Безпосереднім диференціюванням, враховуючи (3.2), знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} (e^{2z} - 1)^{1/2}; \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dz^2} (e^{2z} - 1) + \frac{dy}{dz} e^{2z}; \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d^3 y}{dz^3} (e^{2z} - 1)^{3/2} + 3 \frac{d^2 y}{dz^2} e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2} + 2 \frac{dy}{dz} e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Підставивши (3.3) в (1.1), будемо мати

$$\begin{aligned} a_0(x) \left[ \frac{d^3 y}{dz^3} (e^{2z} - 1)^{3/2} + 3 \frac{d^2 y}{dz^2} e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2} + 2 \frac{dy}{dz} e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2} \right] + \\ + a_1(x) \left[ \frac{d^2 y}{dz^2} (e^{2z} - 1) + \frac{dy}{dz} e^{2z} \right] + a_2(x) \frac{dy}{dz} (e^{2z} - 1)^{1/2} + a_3(x) y(x) = 0. \end{aligned}$$

Після приведення подібних членів останнє рівняння перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dz^3} \left[ a_0(x) (e^{2z} - 1)^{3/2} \right] + \frac{d^2 y}{dz^2} \left[ 3a_0(x) e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2} + a_1(x) (e^{2z} - 1) \right] + \\ + \frac{dy}{dz} \left[ 2a_0(x) e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2} + a_1(x) e^{2z} + a_2(x) (e^{2z} - 1)^{1/2} \right] + a_3(x) y(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В останньому рівнянні, як і раніше, функцію  $y$  вважають функцією незалежної змінної  $z$ .

В (3.4) приймемо, що

$$\begin{cases} a_0(x) (e^{2z} - 1)^{3/2} = C_0; \\ 3a_0(x) e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2} + a_1(x) (e^{2z} - 1) = C_1; \\ 2a_0(x) e^{2z} (e^{2z} - 1)^{1/2} + a_1(x) e^{2z} + a_2(x) (e^{2z} - 1)^{1/2} = C_2; \\ a_3(x) = C_3; \end{cases} \quad (3.5)$$

де  $C_i$ ,  $(i = \overline{0,3})$  - довільні константи. З системи (3.5), враховуючи (3.2), знайдемо коефіцієнти  $a_i(x)$ ,  $(i = \overline{0,3})$

$$\begin{cases} a_0(x) = C_0 \operatorname{ctg}^3 x; \\ a_1(x) = \left( C_1 - \frac{3C_0}{\sin^2 x} \right) \operatorname{ctg}^2 x; \\ a_2(x) = \left\{ C_2 - \frac{1}{\sin^2 x} \left[ C_1 - C_0 \left( \frac{3}{\sin^2 x} - 2 \right) \right] \right\} \operatorname{ctg} x; \\ a_3(x) = C_3. \end{cases} \quad (3.6)$$

Використавши (3.6) рівняння (1.1) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} C_0 \operatorname{ctg}^3 x \frac{d^3 y}{dx^3} + \left( C_1 - \frac{3C_0}{\sin^2 x} \right) \operatorname{ctg}^2 x \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ + \left\{ C_2 - \frac{1}{\sin^2 x} \left[ C_1 - C_0 \left( \frac{3}{\sin^2 x} - 2 \right) \right] \right\} \operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} + C_3 y(x) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отже, рівняння (3.7) за допомогою підстановки  $\cos x = e^{-z}$  приводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами відносно функції  $y(z)$  вигляду (1.9). Якщо ж ми маємо неоднорідне рівняння (2.1), то справедливі викладення, описані в §2.

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\operatorname{ctg}^3 x \frac{d^3 y}{dx^3} + \operatorname{ctg}^2 x \left(1 - \frac{3}{\sin^2 x}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} - \operatorname{ctg} x \left(2 - \frac{3 \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}\right) \frac{dy}{dx} = 4 \cos x \quad (\text{П2.1})$$

на проміжку  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Розв'язування.** Очевидно, що структура відповідного однорідного рівняння співпадає з структурою рівняння (3.7) при  $C_0 = 1; C_1 = 1; C_2 = -2; C_3 = 0$ . Отже, застосувавши підстановку (3.1) отримаємо рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} = 4e^{-z}.$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$y(z) = K_1 + K_2 e^z + K_3 e^{-2z} + 2e^{-z}. \quad (\text{П2.2})$$

Використавши підстановку (3.1), з (П2.2), отримаємо шуканий розв'язок рівняння (П2.1)

$$y(x) = K_1 + \frac{K_2}{\cos x} + K_3 \cos^2 x + 2 \cos x.$$

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720с.