УДК 517.926

Б.І.Дутчак
Луцький національний технічний університет

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ З ДОПОМОГОЮ ПІДСТАНОВОК $\sin x = e^z$ ТА $\cos x = e^{-z}$

Розглядаються звичайні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, які можуть бути про інтегровані, шляхом зведення їх до рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Ключові слова: диференціальні рівняння, перетворення Лапласа, визначальна функція, слід, визначник.

§1. Однорідні рівняння

Для забезпечення прозорості викладок розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння третього порядку із змінними коефіцієнтами

$$a_0(x)\frac{d^3y}{dx^3} + a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_2(x)\frac{dy}{dx} + a_3(x)y(x) = 0, \tag{1.1}$$

де коефіцієнти $a_i(x)$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ - деякі неперервні функції дійсної змінної x, визначені на проміжку $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Визначимо вигляд коефіцієнтів, при яких рівняння (1.1) може бути розв'язане за допомогою підстановки

$$\sin x = e^z. \tag{1.2}$$

З (1.2) знайдемо

$$z = \ln \sin x \ \text{ і } \ \frac{dz}{dx} = ctgx = \left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Безпосереднім диференціюванням, враховуючи (1.3), знаходимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(e^{-2z} - 1\right) - \frac{dy}{dz}e^{-2z};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(e^{-2z} - 1\right)^{3/2} - 3\frac{d^2y}{dz^2}e^{-2z}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2} + 2\frac{dy}{dz}e^{-2z}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Підставивши (1.4) в (1.1), будемо мати

$$a_0(x)\left[\frac{d^3y}{dz^3}\left(e^{-2z} - 1\right)^{3/2} - 3\frac{d^2y}{dz^2}e^{-2z}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2} + 2\frac{dy}{dz}e^{-2z}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2}\right] +$$

$$+ a_1(x)\left[\frac{d^2y}{dz^2}\left(e^{-2z} - 1\right) - \frac{dy}{dz}e^{-2z}\right] + a_2(x)\frac{dy}{dz}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2} + a_3(x)y(x) = 0.$$

Привівши подібні члени, останнє рівняння перепишеться у вигляді

$$\frac{d^3y}{dz^3}\left[a_0(x)\left(e^{-2z} - 1\right)^{3/2}\right] + \frac{d^2y}{dz^2}\left[-3a_0(x)e^{-2z}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2} + a_1(x)\left(e^{-2z} - 1\right)\right] +$$

$$+\frac{dy}{dz}\left[2a_0(x)e^{-2z}\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2} - a_1(x)e^{-2z} + a_2(x)\left(e^{-2z} - 1\right)^{1/2}\right] + a_3(x)y(z) = 0. \tag{1.5}$$

В останньому рівнянні функцію y вважають залежною від змінної z.

При цьому приймемо, що

$$\begin{cases} a_0(x)\left(e^{-2z}-1\right)=C_0; \\ -3a_0(x)e^{-2z}\left(e^{-2z}-1\right)^{1/2}+a_1(x)\left(e^{-2z}-1\right)=C_1; \\ 2a_0(x)e^{-2z}\left(e^{-2z}-1\right)^{1/2}-a_1(x)e^{-2z}+a_2(x)\left(e^{-2z}-1\right)^{1/2}=C_2; \\ a_3(x)=C_3; \end{cases} \tag{1.6}$$

де C_i, $\left(i=\overline{0,3}\right)$ - довільні константи. З системи (1.6), враховуючи (1.3), знайдемо коефіцієнти $a_i(x)$, $\left(i=\overline{0,3}\right)$:

$$\begin{cases} a_0(x)=C_0 tg^3 x; \\ a_1(x)=\left(C_1+\dfrac{3C_0}{\cos^2 x}\right)tg^2 x; \\ a_2(x)=\left\{C_2+\dfrac{1}{\cos^2 x}\left[C_1+C_0\left(\dfrac{3}{\cos^2 x}-2\right)\right]\right\}tgx; \\ a_3(x)=C_3. \end{cases} \tag{1.7}$$

Використавши (1.7), перепишемо рівняння (1.5) у вигляді

$$C_0 tg^3 x\frac{d^3y}{dx^3}+\left(C_1+\frac{3C_0}{\cos^2 x}\right)tg^2 x\frac{d^2y}{dx^2}+$$
$$+\left\{C_2+\frac{1}{\cos^2 x}\left[C_1+C_0\left(\frac{3}{\cos^2 x}-2\right)\right]\right\}tgx\frac{dy}{dx}+C_3y(x)=0. \tag{1.8}$$

Отже, рівняння (1.8) за допомогою підстановки $\sin x=e^z$ приводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами відносно функції $y(z)$

$$C_0\frac{d^3y}{dz^3}+C_1\frac{d^2y}{dz^2}+C_2\frac{dy}{dz}+C_3y(z)=0, \tag{1.9}$$

розв'язування якого є відомим. А перейшовши до вихідної змінної x, отримаємо шуканий розв'язок $y(x)$.

Поступаючи аналогічно, можна побудувати диференціальні рівняння вище третього порядку, які розв'язуються за допомогою підстановки (1.2).

§2. Неоднорідні рівняння

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку з змінними коефіцієнтами

$$a_0(x)\frac{d^3y}{dx^3}+a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_2(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y(x)=f(x), \tag{2.1}$$

де $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Відомо [1], що загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і окремого розв'язку неоднорідного рівняння. Відповідним однорідним рівнянням є рівняння (1.1). За допомогою підстановки (1.2) приведемо його до рівняння з постійними коефіцієнтами (1.9), відносно незалежної змінної z, загальний розв'язок $y_{зо}(z)$ якого може бути записаний у вигляді

$$y_{зо}(z)=K_1y_1(z)+K_2y_2(z)+K_3y_3(z), \tag{2.2}$$

де K_i та $y_i(z)$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$ відповідно довільні константи та лінійно незалежні розв'язки рівняння (1.9).

Виразивши праву частину рівняння (2.1) через змінну z переходимо до рівняння

$$C_0 \frac{d^3y}{dz^3} + C_1 \frac{d^2y}{dz^2} + C_2 \frac{dy}{dz} + C_3 y(z) = \varphi(z). \tag{2.3}$$

Окремий розв'язок $y_{он}(z)$ цього рівняння знаходять відомим способом. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y(z)$ буде мати вигляд

$$y(z) = y_{зо}(z) + y_{он}(z). \tag{2.4}$$

Перейшовши в (2.4) до змінної x отримуємо загальний розв'язок рівняння (2.1).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$tg^3 x \frac{d^3y}{dx^3} + tg^2 x\left(\frac{3}{\cos^2 x} - 1\right)\frac{d^2y}{dx^2} + tgx\left(\frac{3tg^2 x}{\cos^2 x} - 2\right)\frac{dy}{dx} = 4\sin x \tag{П1.1}$$

на інтервалі $x \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$.

Розв'язування. Очевидно, що структура відповідного однорідного рівняння співпадає з структурою рівняння (1.8). отже, можна застосувати підстановку (1.2). Коефіцієнти C_i, $\left(i = \overline{0,2}\right)$ обчислюємо з системи (1.6), враховуючи, що $e^{-2z} - 1 = ctgx$:

$$C_0 = a_0(x) \cdot ctg^3 x = tg^3 x \cdot ctg^3 x = 1$$

$$C_1 = tg^2 x\left(\frac{3}{\cos^2 x} - 1\right)ctg^2 x - 3\frac{tg^3 x}{\sin^2 x} ctgx = -1$$

$$C_2 = \frac{2tg^3 x \cdot ctgx}{\sin^2 x} - \frac{tg^2 x}{\sin^2 x}\left(\frac{3}{\cos^2 x} - 1\right) + tgx\left(\frac{3tg^2 x}{\cos^2 x} - 2\right)ctgx = -2$$

і поклавши $C_3(x) = 0$, будемо мати $C_3 = 0$. Тоді відповідне однорідне рівняння відносно змінної z буде мати вигляд

$$\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} = 0.$$

Очевидно, що його загальним розв'язком є

$$y_{зо}(z) = K_1 + K_2 e^{2z} + K_3 e^{-z}.$$

Враховуючи підстановку (1.2), представимо праву частину рівняння (П1.1) у вигляді $4e^z$ і розглянемо неоднорідне рівняння

$$\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} = 4e^z. \tag{П1.2}$$

Окремим розв'язком цього рівняння буде $y_{он}(z) = -2e^z$.

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (П1.2) буде мати вигляд

$$y(z) = K_1 + K_2 e^{2z} + K_3 e^{-z} - 2e^z.$$

Використавши підстановку $e^z = \sin x$, отримаємо загальний розв'язок рівняння (П1.1)

$$y(x) = K_1 + K_2 \sin^2 x + \frac{K_3}{\sin x} - 2\sin x.$$

§3. Підстановка $\cos x = e^{-z}$

Очевидно, що підстановка (1.2) відображає проміжок $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ в інтервал $z \in (-\infty; 0)$. Отже, рівняння (1.9) розв'язується на інтервалі $(-\infty; 0)$, що не є загальноприйнятим. В зв'язку з цим розглянемо підстановку

$$\cos x = e^{-z}, \tag{3.1}$$

яка відображає проміжок $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ в інтервал $z \in (0;+\infty)$. З (3.1) знайдемо

$$z = -\ln\cos x \quad \text{і} \quad \frac{dz}{dx} = tgx = \left(e^{2z} - 1\right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Безпосереднім диференціюванням, враховуючи (3.2), знаходимо:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2}; \\ &\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(e^{2z} - 1\right) + \frac{dy}{dz}e^{2z}; \\ &\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(e^{2z} - 1\right)^{3/2} + 3\frac{d^2y}{dz^2}e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} + 2\frac{dy}{dz}e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Підставивши (3.3) в (1.1), будемо мати

$$a_0(x)\left[\frac{d^3y}{dz^3}\left(e^{2z} - 1\right)^{3/2} + 3\frac{d^2y}{dz^2}e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} + 2\frac{dy}{dz}e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2}\right] +$$

$$+ a_1(x)\left[\frac{d^2y}{dz^2}\left(e^{2z} - 1\right) + \frac{dy}{dz}e^{2z}\right] + a_2(x)\frac{dy}{dz}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} + a_3(x)y(x) = 0.$$

Після приведення подібних членів останнє рівняння перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{d^3y}{dz^3}\left[a_0(x)\left(e^{2z} - 1\right)^{3/2}\right] + \frac{d^2y}{dz^2}\left[3a_0(x)e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} + a_1(x)\left(e^{2z} - 1\right)\right] + \\ &+ \frac{dy}{dz}\left[2a_0(x)e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} + a_1(x)e^{2z} + a_2(x)\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2}\right] + a_3(x)y(z) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В останньому рівнянні, як і раніше, функцію y вважають функцією незалежної змінної z.

В (3.4) приймемо, що

$$\begin{cases} a_0(x)\left(e^{2z} - 1\right)^{3/2} = C_0; \\ 3a_0(x)e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} + a_1(x)\left(e^{2z} - 1\right) = C_1; \\ 2a_0(x)e^{2z}\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} + a_1(x)e^{2z} + a_2(x)\left(e^{2z} - 1\right)^{1/2} = C_2; \\ a_3(x) = C_3; \end{cases} \tag{3.5}$$

де C_i, $\left(i = \overline{0,3}\right)$ - довільні константи. З системи (3.5), враховуючи (3.2), знайдемо коефіцієнти $a_i(x)$, $\left(i = \overline{0,3}\right)$

$$\begin{cases} a_0(x) = C_0 ctg^3 x; \\ a_1(x) = \left(C_1 - \dfrac{3C_0}{\sin^2 x}\right)ctg^2 x; \\ a_2(x) = \left\{C_2 - \dfrac{1}{\sin^2 x}\left[C_1 - C_0\left(\dfrac{3}{\sin^2 x} - 2\right)\right]\right\}ctgx; \\ a_3(x) = C_3. \end{cases} \tag{3.6}$$

Використавши (3.6) рівняння (1.1) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} &C_0 ctg^3 x\frac{d^3y}{dx^3} + \left(C_1 - \frac{3C_0}{\sin^2 x}\right)ctg^2 x\frac{d^2y}{dx^2} + \\ &+ \left\{C_2 - \frac{1}{\sin^2 x}\left[C_1 - C_0\left(\frac{3}{\sin^2 x} - 2\right)\right]\right\}ctgx\frac{dy}{dx} + C_3 y(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Отже, рівняння (3.7) за допомогою підстановки $\cos x = e^{-z}$ приводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами відносно функції $y(z)$ вигляду (1.9). Якщо ж ми маємо неоднорідне рівняння (2.1), то справедливі викладення, описані в §2.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$ctg^3 x \frac{d^3 y}{dx^3} + ctg^2 x \left(1 - \frac{3}{\sin^2 x}\right)\frac{d^2 y}{dx^2} - ctgx \left(2 - \frac{3ctg^2 x}{\sin^2 x}\right)\frac{dy}{dx} = 4\cos x \qquad (\Pi 2.1)$$

на проміжку $x \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$.

Розв'язування. Очевидно, що структура відповідного однорідного рівняння співпадає з структурою рівняння (3.7) при $C_0 = 1; C_1 = 1; C_2 = -2; C_3 = 0$. Отже, застосувавши підстановку (3.1) отримаємо рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{d^2 y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} = 4e^{-z}.$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$y(z) = K_1 + K_2 e^z + K_3 e^{-2z} + 2e^{-z}. \qquad (\Pi 2.2)$$

Використавши підстановку (3.1), з (П2.2), отримаємо шуканий розв'язок рівняння (П2.1)

$$y(x) = K_1 + \frac{K_2}{\cos x} + K_3 \cos^2 x + 2\cos x.$$

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720с.