

УДК 621.397.3

В.О.Ліщина.

Луцький інститут розвитку людини Університету «Україна»

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРХОВИХ ЛІСОВИХ ПОЖЕЖ

Досліджуються процеси розповсюдження верхових лісових пожеж, зокрема, аеродинаміка атмосфери над нею. Для розв'язання відповідної системи рівнянь Нав'є—Стокса запропоновано ітераційний числово-аналітичний метод. Розроблено відповідне алгоритмічне і програмне забезпечення реалізації методу. Наведено результати комп'ютерного моделювання.

Вступ.

Мета математичного моделювання верхових лісових пожеж полягає у дослідженні процесів розповсюдження розвинених пожеж. Розглядається загальна математична модель, у рамках якої можна передбачати всі характеристики (швидкість, контур, поля температур, концентрацій і швидкостей) у фронті і зоні лісової пожежі. Математична модель, що розглядається, може застосовуватися для експертної оцінки розвитку ситуації у реальних лісових пожежах для прийняття рішень про знешкодження пожеж і оцінки наслідків лісових пожеж.

Постановка задачі.

Розглянемо задачу про розповсюдження двовимірної верхової пожежі. Відомі швидкість вітру і температура довкілля, геометричні, структурні та реакційні властивості пологую лісу, температура і розміри осередку загоряння. Потрібно визначити поля швидкості і температури у приземному шарі атмосфери (у тому числі й у полозі лісу), а також швидкість розповсюдження лісової пожежі і концентрації твердої фази (продукту піролізу легкозаймистих займистих матеріалів).

Огляд експериментальних робіт, [1—5], свідчить, що у загальному випадку течія двохфазного середовища, що реагує, у приземному шарі атмосфери є турбулентна. Слід зазначити, що для правильного опису верхової лісової пожежі необхідне знання про взаємодію різних ярусів лісу у ході цього процесу. Згідно спостереженням і експериментальним дослідженням [5], верхова лісова пожежа у реальних умовах стимулює виникнення низинних лісових пожеж і навпаки. Осередки низової пожежі, що виникають при розсіюванні частинок, що горять, перед фронтом пожежі, і догоряння лісових займистих матеріалів (ЛЗМ) за фронтом забезпечують додаткове тепловиділення, і, отже, сприяють стабільності розповсюдження верхової пожежі.

Розглядається дві задачі формування поля швидкості, температури і густини у приземному шарі атмосфери при заданому вітрі і характеристиках інтенсивної низової пожежі. Математично задача зводиться до розв'язання таких рівнянь Рейнольдса:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rw}{\partial z} = M; \quad (1)$$

$$r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (-ru'^2) + \frac{\partial}{\partial z} (-ru'w'); \quad (2)$$

$$r \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - (r - r_\infty) + \frac{\partial}{\partial x} (-ru'w') + \frac{\partial}{\partial z} (-rw'^2); \quad (3)$$

$$rc_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-rc_p u'T') + \frac{\partial}{\partial z} (-rc_p w'T') + Q; \quad (4)$$

$$rT = r_\infty T_\infty.$$

Компоненти тензора турбулентних напружень, а також турбулентні потоки тепла записуються через градієнти середньої течії:

$$-ru_i u_j' = m_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} r K d_{ij}; \quad (5)$$

$$-ru_i T' = \frac{I_i}{Pr_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad Pr_i = 1; \quad (6)$$

$$K = l^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{g}{T \text{Pr}_t} \frac{\partial q}{\partial z} \right]; \quad (7)$$

$$m_t = r \sqrt{K}; \quad q = T - T_\infty. \quad (8)$$

При запису рівнянь (1)—(6) використовувалося звичайне для теорії турбулентності припущення про те, що пульсації густини є малі порівняно із пульсаціями компонент швидкості.

Запровадимо контрольний об'єм, що містить у собі фронт пожежі. Тоді для задачі тепло- і масопереносу у приземному шарі атмосфери при низинних лісових пожежах початкові і межові умови мають вигляд:

$$u|_{t=0} = u_\infty(z); \quad w|_{t=0} = 0; \quad T|_{t=0} = T_\infty; \quad |x| > x_G; \quad z > z_0; \quad (9)$$

$$u|_{x=x_\infty} = u_\infty(z); \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_\infty} = 0; \quad T|_{x=x_\infty} = T_\infty; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_\infty} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_\infty} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_\infty} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_\infty} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=z_\infty} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_\infty} = 0. \quad (12)$$

Тут z_0 – висота рівня шорсткості; u_∞, T_∞ визначаються із звичайних диференціальних рівнянь, що випливають із рівнянь (1)—(6) за умови, що всі члени під знаком $\partial/\partial t$ і $\partial/\partial x$ тотожно дорівнюють нулю, а T_G, w_G – задані сталі, які й характеризують енергетику фронту низинної пожежі.

При вирішенні задачі фронт верхової пожежі моделюється зоною підвищених температур у полозі лісу. Аеродинамічний опір лісового масиву не враховується, а структурні характеристики (висота дерев і питома поверхня фітомаси) враховуються через довжину шляху змішування. Температура у фронті пожежі і ширина фронту задавалися. Тому межові і початкові умови для другої задачі зберігають той самий вигляд (9)—(12), але в області $\{ |x| \leq x_G; z_0 < z < h \}$, $T = T_G$, де h – висота верхньої межі полого лісу. Вочевидь, математична постановка задачі справедлива тільки для досить малих і досить великих значень часу, коли настає стаціонарний розподіл верхової пожежі.

Характерна особливість задачі, що розглядається, є те, що залежністю густини газу від тиску можна знехтувати. Але у силу суттєвої неізотермічності процесу не можна нехтувати залежністю густини газу від температури.

Вихідні дані: швидкість вдуву $w_w = 2.56$ м/с, $T_G = 1200$ К, $T_\infty = 300$ К, $x_G = 3$ м.

У подальшому конвективною колонкою вважатимемо течію із вихором на боці фронту пожежі за вітром.

Розв'язання задачі

За припущення сталості густини $r = \text{const}$ запишемо систему рівнянь відносно швидкості і температури потоку:

$$r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = m_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - rR \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{2}{3} r \frac{\partial K}{\partial x}; \quad (13)$$

$$r \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = m_t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - rR \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2}{3} r \frac{\partial K}{\partial z}; \quad (14)$$

$$r c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = I_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (15)$$

Початкові і межові умови для системи рівнянь (13)—(15) задаються у вигляді (9)—(12).

Ця система рівнянь – квазілінійна. Відокремимо у кожному рівнянні лінійну частину.

Позначимо $V = z - h_2$ ($V \in [0, L_z]$, $x \in [0, L_x]$). Система рівнянь набуває вигляд

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} = \frac{m_T}{r} \left(\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial V^2} \right) - R \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}; \quad (16)$$

$$N_u^{(0)} = \frac{2}{3} \frac{\partial K^{(0)}}{\partial x} + \left(u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial V} \right);$$

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} = \frac{m_T}{r} \left(\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial V^2} \right) - R \frac{\partial T^{(0)}}{\partial V}; \quad (17)$$

$$N_w^{(0)} = \frac{2}{3} \frac{\partial K^{(0)}}{\partial V} + \left(u^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial V} \right);$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} = \frac{I_T}{rc_p} \left(\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial V^2} \right); \quad (18)$$

$$N_T^{(0)} = \left(u^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial V} \right).$$

Знайдемо розв'язання лінійної частини цієї системи із урахуванням початкових і межових умов.

$$T^{(0)}(x, V, t) = \sum_{m,l} Z_T(a_m^T, V) X_T(b_l^T, x) T_{m,l}^{(0)}(t);$$

$$u^{(0)}(x, V, t) = \sum_{m,l} Z_u(a_m^u, V) X_u(b_l^u, x) U_{m,l}^{(0)}(t);$$

$$w^{(0)}(x, V, t) = \sum_{m,l} Z_w(a_m^w, V) X_w(b_l^w, x) W_{m,l}^{(0)}(t).$$

Власні функції відповідних крайових задач за змінними V і x відповідно для рівнянь (16)—(18) отримані у такому вигляді:

$$Z_T(a_m^T, z) = \frac{1}{C_m^T} \cos a_m^T z; \quad Z_u(a_m^u, z) = \frac{1}{C_m^u} \left[\sin a_m^u z - \frac{a_m^u}{n} \cos a_m^u z \right]; \quad Z_w(a_m^w, z) = \frac{1}{C_m^w} \cos a_m^w z$$

;

$$X_T(b_l^T, x) = \frac{1}{D_l^T} \cos b_l^T x; \quad X_u(b_l^u, x) = \frac{1}{D_l^u} \sin b_l^u x; \quad X_w(b_l^w, x) = \frac{1}{D_l^w} \cos b_l^w x.$$

$$a_m^T, a_m^u, a_m^w, \quad b_l^T, b_l^u, b_l^w \text{ c}$$

– відповідні власні значення,

$$g_{m,l}^T = \frac{I_T}{rc_p} \left[(a_m^T)^2 + (b_l^T)^2 \right]; \quad g_{m,l}^u = \frac{m}{r} \left[(a_m^u)^2 + (b_l^u)^2 \right]; \quad g_{m,l}^w = \frac{m}{r} \left[(a_m^w)^2 + (b_l^w)^2 \right].$$

C_m^j, D_l^j – норми відповідних власних функцій.

Застосування інтегральних перетворень до системи рівнянь (13)—(15) призводить до такої системи функціональних рівнянь у просторі зображень (p – оператор Лапласа);

$$\bar{\bar{U}}_{m,l}^{(n)}(a_m^u, b_l^u, p) = \bar{\bar{U}}_{m,l}^{(0)}(a_m^u, b_l^u, p) + \frac{1}{p + g_{m,l}^u} L_t \left\{ \bar{\bar{N}}_u \left[u^{(n-1)}, w^{(n-1)}, T^{(n-1)} \right] \right\}$$

$$\bar{\bar{W}}_{m,l}^{(n)}(a_m^w, b_l^w, p) = \bar{\bar{W}}_{m,l}^{(0)}(a_m^w, b_l^w, p) + \frac{1}{p + g_{m,l}^w} L_t \left\{ \bar{\bar{N}}_w \left[u^{(n-1)}, w^{(n-1)}, T^{(n-1)} \right] \right\}$$

$$\bar{\bar{T}}_{m,l}^{(n)}(a_m^T, b_l^T, p) = \bar{\bar{T}}_{m,l}^{(0)}(a_m^T, b_l^T, p) + \frac{1}{p + g_{m,l}^T} L_t \left\{ \bar{\bar{N}}_T \left[u^{(n-1)}, w^{(n-1)}, T^{(n-1)} \right] \right\}.$$

Під час виконання перетворень нелінійних функцій $\overline{N}_u \left[u_{m,l}^{(n-1)}, w_{m,l}^{(n-1)}, T_{m,l}^{(n-1)} \right]$, $\overline{N}_w \left[u_{m,l}^{(n-1)}, w_{m,l}^{(n-1)}, T_{m,l}^{(n-1)} \right]$, $\overline{N}_T \left[u_{m,l}^{(n-1)}, w_{m,l}^{(n-1)}, T_{m,l}^{(n-1)} \right]$ процедура підсумовування призводить до суттєвого накопичення членів у цих функціях, що містять експоненціальні функції. З метою запобігання цього ефекту розроблено алгоритми спрощення таких виразів із використанням апарату ланцюгових дробів [7]. У підсумку отримуються вирази у так званому стандартному вигляді.

У просторі оригіналів цим виразам відповідають:

$$u^{(n)}(x, V, t) = \sum_{m,l} Z_u(a_m^u, V) X_u(b_l^u, x) \left[U_{m,l}^{(0)}(t) + U_{m,l}^{(n-1)}(t) \right] = \sum_{m,l} Z_u(a_m^u, V) X_u(b_l^u, x) U_{m,l}^{(n)}(t).$$

$$w^{(n)}(x, V, t) = \sum_{m,l} Z_w(a_m^w, V) X_w(b_l^w, x) \left[W_{m,l}^{(0)}(t) + W_{m,l}^{(n-1)}(t) \right] = \sum_{m,l} Z_w(a_m^w, V) X_w(b_l^w, x) W_{m,l}^{(n)}(t);$$

$$T^{(n)}(x, V, t) = \sum_{m,l} Z_T(a_m^T, V) X_T(b_l^T, x) \left[T_{m,l}^{(0)}(t) + T_{m,l}^{(n-1)}(t) \right] = \sum_{m,l} Z_T(a_m^T, V) X_T(b_l^T, x) T_{m,l}^{(n)}(t).$$

Функції $U_{m,l}^{(0)}(t)$, $W_{m,l}^{(0)}(t)$, $T_{m,l}^{(0)}(t)$ отримані у результаті застосування скінченних інтегральних перетворень за просторовими змінними та перетворення Лапласа за часом.

Ці функції на будь-якій ітерації отримано у такому вигляді.

$$U_{m,l}^{(n)}(t) = u0_{m,l}^{(n)} + e^{-u3_{m,l}^{(n)}t} \left(u1_{m,l}^{(n)} sh u4_{m,l}^{(n)}t + u2_{m,l}^{(n)} ch u4_{m,l}^{(n)}t \right); \quad (19)$$

$$W_{m,l}^{(n)}(t) = w0_{m,l}^{(n)} + e^{-w3_{m,l}^{(n)}t} \left(w1_{m,l}^{(n)} sh w4_{m,l}^{(n)}t + w2_{m,l}^{(n)} ch w4_{m,l}^{(n)}t \right); \quad (20)$$

$$T_{m,l}^{(n)}(t) = t0_{m,l}^{(n)} + e^{-t3_{m,l}^{(n)}t} \left(t1_{m,l}^{(n)} sh t4_{m,l}^{(n)}t + t2_{m,l}^{(n)} ch t4_{m,l}^{(n)}t \right). \quad (21)$$

Оцінка похибки наближень.

Для оцінки похибки наближень в ітераційному процесі запишемо вирази для норм двох сусідніх наближень.

$$\begin{aligned} & \left\| u^{(n)}(x, V, t) - u^{(n-1)}(x, V, t) \right\|^2 = \\ & = \int_0^{L_x} \int_0^{L_x} \int_0^{t_f} \left[\sum_{m,l} Z_u(a_m^u, V) X_u(b_l^u, x) \left(U_{m,l}^{(n)}(t) - U_{m,l}^{(n-1)}(t) \right) \right]^2 dV dx dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Для інших функцій ($w^{(n)}(x, V, t)$, $T^{(n)}(x, V, t)$) вирази для норм є аналогічні.

Інтегрування виразу (22) у силу ортонормованості власних функцій Z_u, X_u зводиться до обчислення інтегралу

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_x} \int_0^{L_x} \int_0^{t_f} \left[\sum_{m,l} Z_u(a_m^u, V) X_u(b_l^u, x) \left(U_{m,l}^{(n)}(t) - U_{m,l}^{(n-1)}(t) \right) \right]^2 dV dx dt \\ & I(t_f) = \sum_{m,l} \left(U_{m,l}^{(n)}(t) - U_{m,l}^{(n-1)}(t) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Результати моделювання на відповідних ітераціях для полів температури та вертикальної швидкості руху наведені нижче.

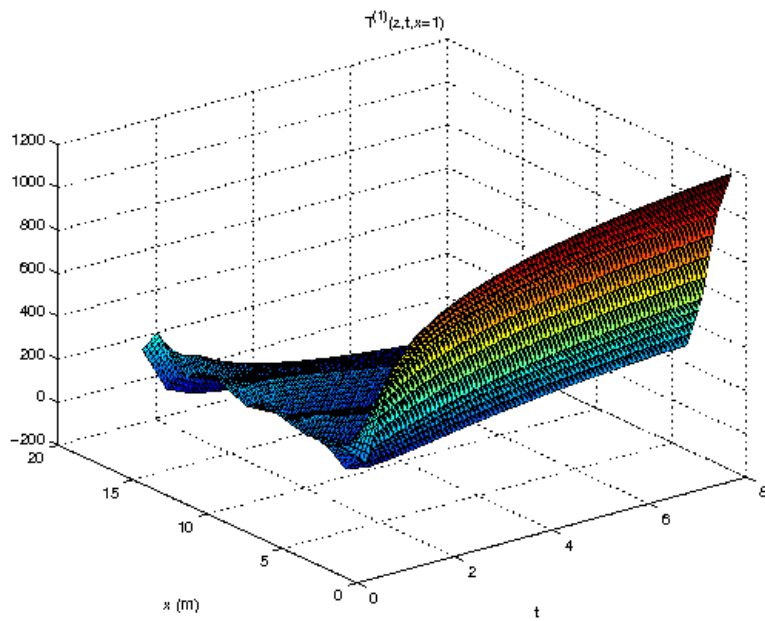


Рис.1. Розподіл температури у лінійному наближенні $T^{(0)}(V, t)$ ($x = 3$).

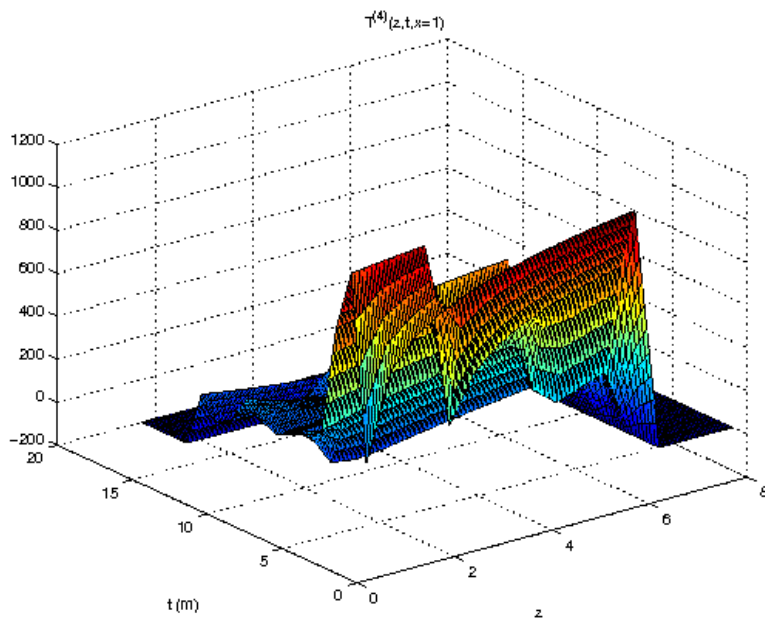


Рис.2. Розподіл температури у другому наближенні $T^{(2)}(V, x)$ ($t = 3$).

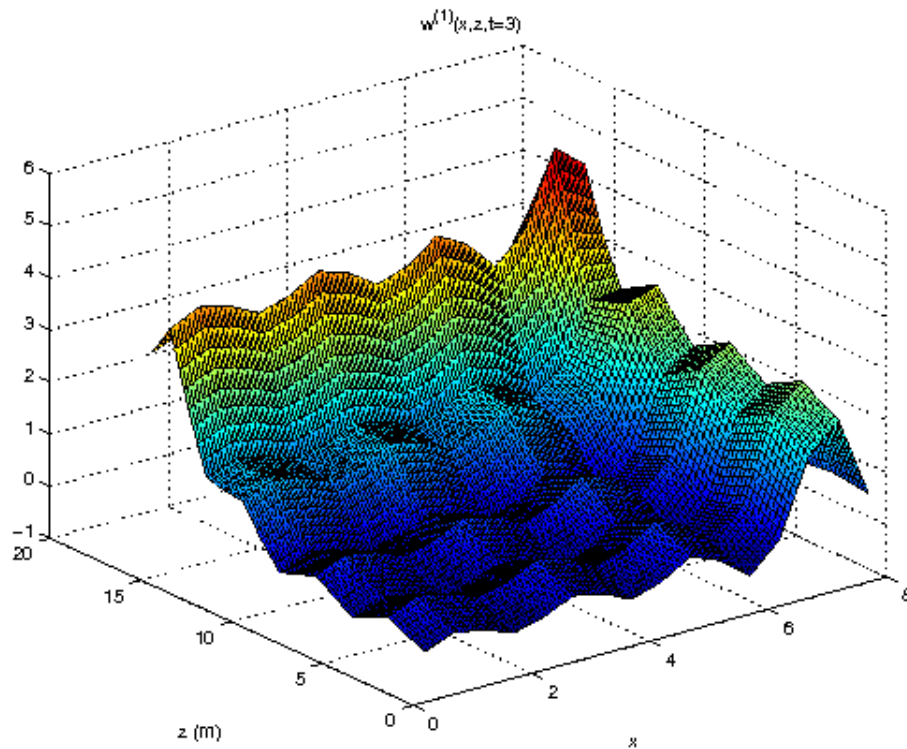


Рис.3. Розподіл швидкості руху повітря у лінійному наближенні $u^{(0)}(V, x)$ ($t = 3$).

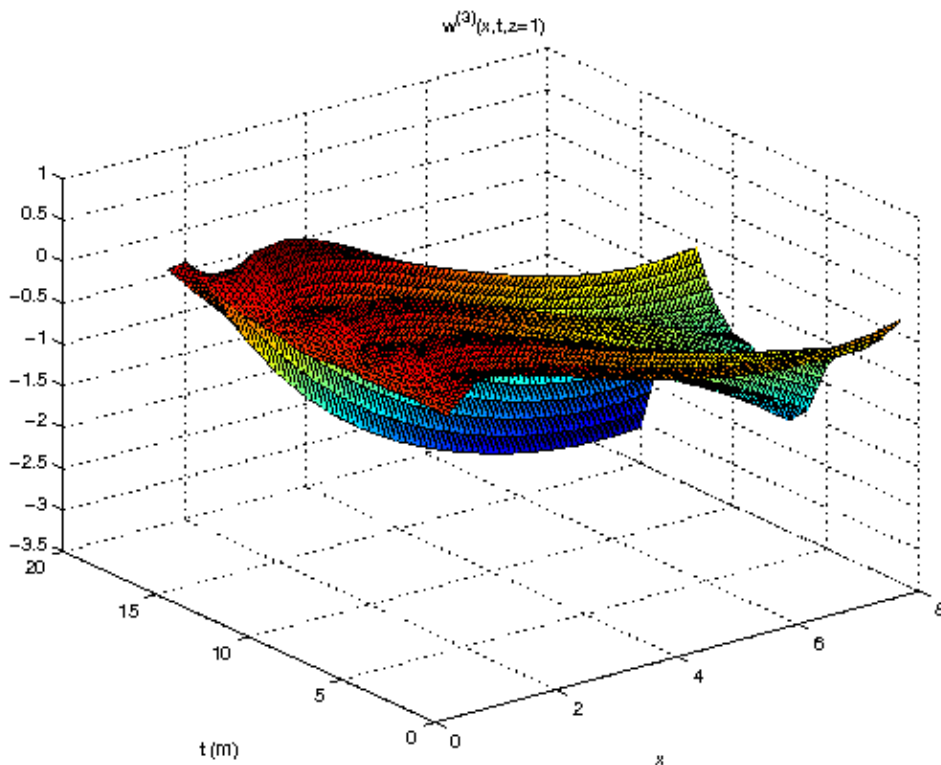


Рис.4. Розподіл швидкості руху у другому наближенні $w^{(2)}(V, x)$ ($t = 3$).

Комп'ютерне моделювання наближень засвідчило, що для досягнення задовільної точності відносно компонент швидкості руху повітря над верховою пожежею досить трьох ітерацій (похибка не перевищує 5%). Для досягнення аналогічної похибки відносно температури атмосфери над верховою пожежею знадобилося виконати шість ітерацій.

Висновки.

1. Запропоновано числово-аналітичний метод розв'язання системи рівнянь гідродинаміки, який ґрунтується на побудові ітераційного процесу із застосуванням скінченних інтегральних перетворень.
2. Застосування запропонованого числово-аналітичного методу надає можливість отримувати розв'язання систем нелінійних рівнянь гідродинаміки у аналітичному вигляді без застосування традиційних нелінійних різницевих схем, що апроксимують ці системи рівнянь.
3. Комп'ютерне моделювання системи рівнянь гідродинаміки стосовно задачі аеродинаміки засвідчило, що застосування ітераційного процесу забезпечує точність розв'язання на третій ітерації відносно температурного поля атмосферного повітря над верховою лісовою пожежею.
4. Отриманий у такий спосіб розв'язок системи рівнянь гідродинаміки надає можливість виконувати математичне моделювання процесів гідро і аеродинаміки із заданою наперед точністю.
5. Запропонований наближений метод може бути застосований для розв'язання широкого класу систем нелінійних задач математичної фізики.

1. Гришин А.М., Грузин А.Д., Зверев В.Г. Математическая теория верхних лесных пожаров. //Теплофизика лесных пожаров.--Нов-ск, 1984.--С.38--75.
2. Гришин А.М. Математические модели лесных пожаров.--Томск, 1981.--277 с.
3. Софронов М.А., Вакуров А.П. Огонь в лесу.--Нов-ск, 1981.-- 127 с.
4. Дубов А.С., Быкова Л.П., Марунич С.В. Турбулентность в растительном покрове.--Л.:-- Гидрометеиздат, 1978.--180 с.
5. Никулин Д.А., Потехин Г.С., Стрелец М.Х. Приближенная система уравнений для описания нестационарной концентрационной естественной конвекции в бинарных газовых смесях.--Изв. АН СССР, МЖГ, 1980.--С.57--61.
6. Зеленський К.Х., В.О. Ліщина. Математичне моделювання аеродинаміки верхових лісових пожеж // ПМЕ, № , 2010, С.
7. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Коц О.П. Комп'ютерні методи прикладної математики.—К.: Академперіодика.—2002.—480 с.