УДК 519.64(045)

В.Ю.Середа
Луцький національний технічний університет

ПРО МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ

В роботі аналізуються методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду, починаючи з робіт Фредгольма (початок XX століття) і закінчуючи методом розщеплення ядра, запропонованим і дослідженим автором цієї статті. Показано, що цей метод є узагальненням деяких раніше відомих методів. Виводиться оцінка похибки методу розщеплення ядра, яка носить апріорний характер, і обґрунтовується його збіжність.

Ключові слова: *рівняння, інтегральне рівняння, система рівнянь, оцінка похибки, збіжність.*

За допомогою лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь приходиться розв'язувати велику кількість задач математичної фізики, механіки і техніки, до яких вони зводяться.

Найбільш часто зустрічаються інтегральні рівняння наступних типів:

1) лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi\left(x\right)=P_0\left(x\right)+\lambda\int_a^b K\left(x,s\right)\varphi\left(s\right)ds\,; \tag{1}$$

2) лінійне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$\varphi\left(x\right)=P_0\left(x\right)+\lambda\int_a^x G\left(x,s\right)\varphi\left(s\right)ds\,;$$

3) нелінійне інтегральне рівняння Гаммерштейна-Урисона

$$\varphi\left(x\right)=\lambda\int_a^b K\left[x,s,\varphi\left(s\right)\right]ds\,;$$

4) нелінійне інтегральне рівняння Вольтерра

$$\varphi\left(x\right)=\lambda\int_a^x G\left[x,s,\varphi\left(s\right)\right]ds$$

та ін.

Оскільки наукові дослідження автора цієї роботи присвячені розробці методів розв'язання інтегральних рівнянь виду (1), то зупинимось більш детально на історичному шляху розвитку методів розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду.

Початок цим методам був покладений ще в роботах Фредгольма [1,2], Шмідта, Гурса і Ністрема вкінці XIX століття. Фредгольм в своїх роботах [1,2] одержав точний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$\varphi\left(x\right)=P_0\left(x\right)+\lambda\int_a^b \Gamma\left(x,s,\lambda\right)P_0\left(s\right)ds\,, \tag{2}$$

де $F\left(x,s,\lambda\right)$ - резольвента Фредгольма

$$\Gamma\left(x,s,\lambda\right)=\frac{D\left(x,s,\lambda\right)}{D\left(\lambda\right)}, \tag{3}$$

при умові, що функції $P_0\left(x\right)$ і $K\left(x,s\right)$ неперервні і $D\left(\lambda\right)\neq 0$. Формули (2), (3) були отримані Фредгольмом за допомогою граничного переходу в системі алгебраїчних рівнянь. Теоретичного обґрунтування цих переходів Фредгольм не приводить: він дає лише практичний спосіб побудови функцій $D\left(x,s,\lambda\right)$, $D\left(\lambda\right)$. В цих же роботах Фредгольм доводить, що розв'язок (2) рівняння (1) при $D\left(\lambda\right)\neq 0$ єдиний і що для рівняння (1) виконуються основні теореми лінійної алгебри і теорема про розподіл власних чисел, при яких рівняння може не мати розв'язку.

Одержані результати Фредгольм узагальнив для системи інтегральних рівнянь і для інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю [1,2].

В першому десятиріччі XX століття Д.Гільбертом і Шмідтом були вивчені симетричні інтегральні рівняння типу Фредгольма другого роду, тобто такі рівняння виду (1), для яких виконується рівність

$$K(x,s)=K(s,x).$$

Для таких рівнянь було встановлено, що

1) власні числа цих рівнянь дійсні;
2) власні функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ симетричного ядра, які відповідають різним власним значенням λ і μ ($\lambda \neq \mu$), ортогональні між собою на основному проміжку $(a;b)$, тобто
$$\int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx=0;$$
3) будь-яка функція виду $\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds$, де $\varphi(s)$ - довільна квадратично сумовна функція, розкладається в ряд по власних функціях ядра $K(x,s)$.

Пізніше було встановлено, що теореми лінійної алгебри справедливі і для таких інтегральних рівнянь, для ядер яких існує подвійний інтеграл

$$\|K(x,s)\|^2=\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2\,dxds.$$

Аналізуючи перші роботи з теорії інтегральних рівнянь, можна зробити висновок, що класична теорія інтегральних рівнянь ставила своєю метою не відшукання ефективних методів для чисельного розв'язання задач вузького класу, а створення загальних методів для встановлення закономірностей, характерних для великої групи задач. Її цікавили, в основному, теореми існування і єдиності, теореми збіжності і асимптотичні формули.

Оскільки розвиток науки і техніки з кожним днем постійно розширював і розширює область застосування математики, він ставить перед математикою все нові і нові задачі теоретичного і практичного характеру. Однією з таких задач була розробка наближених методів розв'язання інтегральних рівнянь (відмітимо, що точний розв'язок інтегрального рівняння (1) в замкнутій формі вдається знайти лише в окремих випадках). Великий поштовх в цьому напрямі дало створення швидкодіючих обчислювальних машин, здатних виконати великий обсяг обчислювальної роботи за порівняно короткий відрізок часу, що було неможливо раніше.

Методи розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду (1) поділяються на аналітичні і чисельні. До аналітичних наближених методів потрібно віднести:

- ітераційні (метод послідовних наближень);
- проекційні (метод Рітца, метод Гальоркіна, метод найменших квадратів і т.д.);
- проекційно-ітераційні (метод Ю.Д.Соколова осереднення функціональних поправок і його модифікації);
- метод скінченних різниць

і різні комбіновані методи (метод смуг, методи Б.А.Бельтюкова, метод розщеплення ядра та інші).

До чисельних методів відносяться чисельні реалізації ітераційних, проекційно-ітераційних і квадратурних методів.

Метод послідовних наближень або метод ітерацій, як його ще називають, застосовувався для розв'язання різних математичних задач уже давно. Так, наприклад, він був використаний ще Ліувіллем в його дослідженнях в області лінійних диференціальних рівнянь, а К.Нейман застосував метод послідовних наближень в своїх роботах з теорії потенціала.

Стосовно застосування методу ітерацій до розв'язання лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду

$$\varphi(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds \qquad (1)$$

він полягає в наступному [3].

За початкове наближення вибирають довільну функцію $\varphi_0(x)$ (часто покладають $\varphi_0(x)=P_0(x)$) і підставляють її в праву частину рівняння (1). Одержимо функцію $\varphi_1(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)ds$, тобто перше наближення.

Поступаючи з $\varphi_1(x)$ аналогічно як з $\varphi_0(x)$, одержимо друге наближення $\varphi_2(x)$ і т.д.; n-те наближення $\varphi_n(x)$ буде виражатися формулою

$$\varphi_n(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s)ds.$$

Для того, щоб метод ітерацій був збіжним, достатньо, щоб параметр λ рівняння (1) задовольняв такій умові:

$$|\lambda|<\frac{1}{B},\quad B=\sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2\,dxds}. \tag{4}$$

Точний розв'язок інтегрального рівняння (1) можна записати в такому вигляді:

$$\varphi(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)P_0(s)ds,$$

де $R(x,s,\lambda)$ - так звана резольвента Неймана

$$R(x,s,\lambda)=K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots,$$

$$K_n(x,s)=\int_a^b K(x,t)\cdot K_{n-1}(t,s)dt,\ \ K_1(x,s)=K(x,s).$$

Позитивним моментом цього методу є простота його обчислювальної схеми.

Істотнім недоліком методу ітерацій є те, що збіжність цього методу має місце лише при тих значеннях λ, які задовольняють умові (4), причому, ця збіжність стає дуже повільною, якщо λ близьке до одного із власних значень ядра $K(x,s)$.

Ці недоліки методу ітерацій на деякий час зменшили інтерес до теорії ітераційних методів. І лише з появою електронно-обчислювальних машин простота обчислювальної схеми методу послідовних наближень знову притягнула увагу математиків-дослідників. Дослідження проводились в двох напрямках: з метою розширити коло задач, які можна було б розв'язати ітераційними методами, і з метою скоротити об'єм обчислювальної роботи. Внаслідок цього появилось багато узагальнень методу послідовних наближень.

Побудова узагальнених ітераційних процесів стала істотнім зрушенням в теорії і практиці чисельних і наближених методів розв'язування інтегральних рівнянь, поскільки багато задач, які раніше не можна було розв'язати методом послідовних наближень, стало можливим розв'язати за допомогою його узагальнень.

Проте, недоліком всієї групи узагальнень ітераційних методів є великий об'єм обчислювальної роботи, який необхідний для попереднього перетворення інтегрального рівняння (1) в еквівалентне йому інтегральне чи операторне рівняння, для розв'язання яких уже можна користуватися методом ітерацій, і повільна збіжність цих методів, коли параметр λ наближається до одного з власних значень ядра $K(x,s)$ інтегрального рівняння (1)

Розглянемо наступний аналітичний метод розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду – метод заміни ядра виродженим. Ідея цього методу полягає в тому, що ядро $K(x,s)$ даного рівняння (1) замінюється наближено виродженим ядром, тобто

$$K(x,s)\approx K^*(x,s)=\sum_{i=1}^n P_i(x)Q_i(s),$$

де $P_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ - лінійно незалежні функції, які утворюють повну систему на відрізку $[a,b]$, а розв'язок $\varphi(x)$ рівняння (1) шукається у вигляді

$$\varphi(x)=P_0(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}C_iP_i(x), \qquad (5)$$

де C_i - невідомі сталі. Іншими словами, ідея методу заміни ядра виродженим полягає в тому, що точний розв'язок інтегрального рівняння з виродженим ядром $K^*(x,s)$ береться за наближений розв'язок рівняння (1).

Оцінка похибки методу заміни ядра виродженим встановлюються наступною теоремою:

Теорема. Нехай задані два ядра $K(x,s)$, $K^*(x,s)$ і відомо, що

$$\int_a^b \left|K(x,s)-K^*(x,s)\right|ds<h$$

і що резольвента $R(x,s,\lambda)$ рівняння з ядром $K^*(x,s)$ задовольняє нерівності

$$\int_a^b \left|R(x,s,\lambda)\right|ds<B, \qquad (6)$$

а також що $\left|P_0(x)-P_0^*(x)\right|<\eta$.

Тоді, якщо виконується умова

$$1-|\lambda|h\left(1+|\lambda|\cdot B\right)>0, \qquad (7)$$

то рівняння

$$\varphi(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

має єдиний розв'язок $\varphi(x)$ і різниця між цим розв'язком і розв'язком $\varphi^*(x)$ рівняння з виродженим ядром $K^*(x,s)$

$$\varphi^*(x)=P_0^*(x)+\lambda\int_a^b K^*(x,s)\varphi^*(s)ds$$

оцінюється так:

$$\left|\varphi(x)-\varphi^*(x)\right|<\frac{N|\lambda|h\left(1+|\lambda|\cdot B\right)^2}{1-|\lambda|h\left(1+|\lambda|\cdot B\right)}+\eta\left(1+|\lambda|\cdot B\right), \qquad (8)$$

де N - верхня границя $\left|P_0(x)\right|$.

Сталі C_i в формулі (5) визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку. З наведеної теореми видно, що для забезпечення умов (6), (7) і для одержання хорошого наближення число n для деяких ядер може бути достатньо великим і, отже, порядок системи алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів C_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ буде досить високим. Розв'язування ж таких систем зв'язано з витратами великого об'єму обчислювальної роботи. Крім того,оскільки умови (6), (7) апріорі перевірити неможливо, то в процесі розв'язання рівняння (1) методом заміни ядра виродженим може трапитися, що умови ці не виконуються або що оцінка похибки методу, обчислена по формулі (8), порівняно велика. Таким чином, вся пророблена обчислювальна робота може виявитись такою, що не дає достатньо точного шуканого розв'язку рівняння (1). Ці зауваження і є основними недоліками методу заміни ядра виродженим.

Ідея методу заміни ядра виродженим була використана при побудові інших методів наближеного розв'язання інтегральних рівнянь виду (1), зокрема методу моментів, методу Рітца (у випадку симетричності ядра $K(x,s)$), методу найменших квадратів. Спільним для розглянутої групи методів є те, що визначення параметрів $C_i \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$ приходиться розв'язувати визначаючу систему n рівнянь; вона може виявитися доволі високого порядку, коли мова йде про одержання наближеного розв'язку $\varphi^*\left(x\right)$ інтегрального рівняння (1) з достатньо великою точністю.

До проекційно-ітераційних методів наближеного розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду відносяться, як зазначалось вище, метод Ю.Д.Соколова осереднення функціональних поправок, який є узагальненням методу послідовних наближень, і його численні модифікації.

До аналітичних методів відноситься також один з класичних методів розв'язання інтегральних рівнянь – метод скінченних різниць. Цей метод ґрунтується на наближеному обчисленні означеного інтеграла за допомогою деякої квадратичної формули

$$\int_a^b F\left(x\right)dx=\sum_{j=1}^{n}A_jF\left(x_j\right)+\rho\left(F\right), \tag{9}$$

де абсциси $x_1,x_2,\ldots,x_n$ належить відрізку $\left[a,b\right]$, числові коефіцієнти $A_1,A_2,\ldots,A_n$ не залежать від вибору $F\left(x\right)$ і $\rho\left(F\right)$ - залишковий член квадратурної формули. Покладемо в інтегральному рівнянні (1) $x=x_i \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$. Тоді

$$\varphi\left(x_i\right)=P_0\left(x_i\right)+\lambda\int_a^b K\left(x_i,s\right)\varphi\left(s\right)ds \quad \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{10}$$

На основі формули (9) рівняння (10) заміняться наступними:

$$\varphi\left(x_i\right)=P_0\left(x_i\right)+\lambda\sum_{j=1}^{n}K\left(x_i,s_j\right)\varphi\left(s_j\right)+\lambda\rho\left(x_i\right). \tag{11}$$

Відкидаючи в системі (11) величини $\lambda\rho\left(x_i\right)$, для знаходження наближених значень $\tilde{\varphi}_i$ розв'язку $\varphi\left(x\right)$ у вузлах $x_1,x_2,\ldots,x_n$ одержимо лінійну алгебраїчну систему

$$\tilde{\varphi}_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}A_jK_{ij}\cdot\tilde{\varphi}_j=P_{0,i} \quad \left(i=\overline{1,n}\right),$$

де $K_{ij}=K\left(x_i,s_j\right), \quad P_{0,i}=P_0\left(x_i\right)$.

Розв'язавши цю систему, ми знайдемо $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\ldots,\tilde{\varphi}_n$, за допомогою яких процесом інтерполяції можна одержати наближений розв'язок інтегрального рівняння (1) на всьому відрізку $\left[a,b\right]$.

За аналітичний вираз наближеного розв'язку $\tilde{\varphi}\left(x\right)$ рівняння (1) можна, зокрема, прийняти функцію

$$\tilde{\varphi}\left(x\right)=P_0\left(x\right)+\lambda\sum_{j=1}^{n}A_jK\left(x,s_j\right)\tilde{\varphi}\left(s_j\right),$$

яка, як випливає зі сказаного вище, приймає у вузлах $x_1,x_2,\ldots,x_n$ значення відповідно $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\ldots,\tilde{\varphi}_n$.

Комбінаційні методи будуються, як правило, на поєднанні основних ідей декількох методів. Так, наприклад, в роботах [4,5] Г.М.Положієм і П.І.Чапенко розроблений так званий метод смуг, в якому використані основні ідеї методів скінченних різниць, простої ітерації і апроксимації ядра виродженим.

Дальнішим розвитком методу смуг є так званий метод розщеплення ядра, основи якого розроблені в роботах автора цієї статті [6,7]. При використанні цього методу область визначення ядра $K\left(x,s\right)$ ділиться на m прямокутників, в кожному з яких дане ядро апроксимується "n_k-членними" ($k=\overline{1,m}$) апроксимуючими функціями. Розв'язок інтегрального рівняння (1) при довільному числовому значенні його параметра λ (відмінному від власного значення ядра

$K(x,s)$) зводиться до розв'язання $n \cdot m$ допоміжних інтегральних рівнянь ($n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$) з одним і тим же малим ядром, які можна розв'язувати будь-яким з відомих уже нам наближених методів (в тому числі й ітераційних), і до розв'язання деякої допоміжної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Побудову метода розщеплення ядра продемонструємо для випадку одного прямокутника.

Для розв'язання рівняння (1) ядро $K(x,s)$ представимо (в квадраті $a \le x, s \le b$) у вигляді суми двох ядер – виродженого і "малого":

$$K(x,s) = K^*(x,s) + D(x,s),$$

де

$$K^*(x,s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \cdot Q_i(s),$$

а $P_i(x), Q_i(x)$ - неперервні на $[a,b]$ функції своїх аргументів.

Припустимо, що параметр λ приймає регулярні значення, так що розв'язок $\varphi(x)$ існує і єдиний. Шуканий розв'язок $\varphi(x)$ рівняння (1) шукають у вигляді [6,7]

$$\varphi(x) = M_0(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(x), \qquad (12)$$

де $M_i(x)$ $(i = \overline{0,n})$ - невідомі функції, які визначаються з $n+1$ лінійних інтегральних рівнянь

$$M_i(x) = P_i(x) + \lambda \int_a^b D(x,s) M_i(s) ds \quad (i = \overline{0,n})$$

з одним і тим самим "малим" ядром $D(x,s)$, а параметри

$$\alpha_i = \int_a^b Q_i(s) \varphi(s) ds$$

визначаються з відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Істотнім є той факт, що для розв'язання рівнянь (12) можна застосовувати метод послідовних наближень або інші наближені ітераційні методи.

З цього методу, як частинні випадки, одержуються:

- метод послідовних наближень (при $K^*(x,s) \equiv 0$);
- метод заміни ядра виродженим (при $D(x,s) \equiv 0$);
- ітераційний метод осереднення функціональних поправок;
- метод смуг.

Оцінка похибки методу розщеплення ядра виведена в роботах [6,7]. Вона має апріорний характер. З неї, як частинний випадок випливає апріорна оцінка методу заміни ядра виродженим. З характеру оцінки випливає як рівномірна збіжність методу розщеплення, так і його збіжність в середньому.

1. Fredholm J. Sur une nouvelle methode pour la resolution du probleme de Dirichlet, Kong. Vetenskaps – Akademtes Förh., Stockholm, 1900.
2. Fredholm J. Sur uneclasse d'equations fonctionnelles, Acta Math., 27, 1903.
3. Трикоми Ф.Д. Интегральные уравнения, М., ИЛ., 1960.
4. Положій Г.М., Чаленко П.Й. Метод смуг розв'язання інтегральних рівнянь, ДАН УРСР, №4, 1962.
5. Положий Г.Н., Чаленко П.И. Решение интегральных уравнений методом полос, Вопросы матем. физики и теории функций, Сборник ин.-та матем. АН УССР, 1963.
6. Середа В.Ю. Узагальнений метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду, ДАН УРСР, сер.А, фіз..-техн. та матем. науки, №2, 1968.
7. Калайда А.Ф., Середа В.Ю. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений второго рода, журнал «Дифференциальные уравнения», 4, №5, 1968.