УДК 519.41/47
В.О. Оніщук, Б.К. Ганулiч
Луцький національний технічний університет

ГРУПИ, ЩО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ СЛАБКУ УМОВУ МІНІМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕАБЕЛЕВИХ СУБНОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

Вивчаються групи з слабкою умовою мінімальності для неабелевих субнормальних підгруп. Показано, що локально нільпотентна група без кручення такого роду гіперцентральна і є розширенням a *велевої групи з допомогою мінімальної групи.*

Ключові слова: *неабелева група, умова мінімальності для підгруп, умова максимальності для підгруп, слабка умова мінімальності для підгруп, слабка умова максимальності для підгруп, мінімаксна група, черніковська група, гіперцентральна група.*

Нехай X - довільна сім'я підгруп деякої групи. Будемо говорити, що група G задовольняє слабку умову мінімальності (максимальності) для X - підгруп, якщо в ній не існує нескінченно спадного (зростаючого) ланцюга X - підгруп

$$G_1 > G_2 > \ldots > G_k > \ldots \left(G_1 < G_2 < \ldots < G_k < \ldots \right),$$

для якого індекси $\left| G_k : G_{k+1} \right|$ є нескінченними для всіх натуральних чисел k.

Слабкі умови мінімальності та максимальності для підгруп були введені Д.І. Зайцевим $[2]$. У роботі $[3]$ показано, що при деяких додаткових обмеженнях групи з такими умовами є мінімаксними, тобто мають скінчений субнормальний ряд, кожний фактор якого задовольняє умові мінімальності чи максимальності для підгруп.

Як і в $[3]$, для звичайної умови мінімальності будемо використовувати символ $\min$ (максимальності - $\max$), для слабкої умови мінімальності – символ $\min-\infty$ (для слабкої умови максимальності - $\max-\infty$.

Д.І. Зайцев $[4]$ описав локально майже розв'язані групи зі слабкою умовою мінімальності для неабелевих підгруп. У роботі $[6]$ Л.А.Курдаченко встановив, що локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді задовольняє слабку умову мінімальності для субнормальних підгруп, коли вона є мінімаксною групою.

У даній роботі вивчаються групи з слабкою умовою мінімальності для неабелевих субнормальних підгруп. Як показує наступний приклад, аналогічний результат не можна отримати навіть для періодичних локально нільпотентних груп, що задовольняють умову $\min-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп.

Нехай $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots -$прямий добуток квазіциклічних $2-$груп і $\langle b \rangle -$циклічна група другого порядку. Визначимо півпрямий добуток $G = A\lambda \langle b \rangle$ наступним чином: $a^b = a^{-1}$. Легко перевірити, що комутант групи $G' = [G, G] = A$. Доведемо, що всі субнормальні підгрупи в групі G абелеві. Нехай H - неабелева субнормаль на підгрупа в G. Тоді $G = AH$ і $A \cap H -$ нормальний дільник в G. Фактор-група $G / A \cap H = \overline{G} = \overline{A}\lambda \langle \overline{b} \rangle = \overline{A}\lambda \langle \overline{h} \rangle$.Оскільки підгрупа $\langle \overline{h} \rangle$ - субнормальна в $\overline{G}$ є нільпотентною. Отже, $\overline{A}$ - одинична підгрупа. Оскільки $G' \le A \cap H$, то $A \cap H = A$ і $A < H$. Таким чином, $H = G$.

Лема 1. Нехай у групі G існує неабелева субормальна підгрупа H, яка розкладається в прямий добуток нескінченної множини підгруп. Тоді група G не задовольняє ні умові $\min-\infty$, ні умові $\max-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп.

Лема 2. Якщо G задовольняє умові $\min-\infty$ (відповідно умові $\max-\infty$) для неабелевих субнормальних підгруп, то довільна її фактор-група задовольняє умові $\min-\infty(\max-\infty)$ для неабелевих субнормальних підгруп.

Лема 3. Якщо група G задовольняє умові $\min-\infty$ (відповідно умові $\max-\infty$) для неабелевих субнормальних підгруп, то довільна її неабелева субнормальна підгрупа задовольняє умові $\min-\infty$ (відповідно умові $\max-\infty$) для неабелевих субнормальних підгруп.

Твердженням лем 1,2,3 є очевидними.

Лема 4. Нормальний дільник A локально нільпотентної групи G є авелевим, a фактор-група G/A - циклічною, то G - гіперцентральна група.

Доведення. Оскільки фактор-група G/A циклічна, то нехай $G/A=\langle bA\rangle$. Тоді $G=A\langle b\rangle$, де A - абелевий нормальний дільник групи G. Спочатку доведемо, що централізатор елемента b в групі G $C_A(b)$ відмінний від одиниці. Для цього візьмемо неодиничний елемент a, який належить до підгрупи A, і розглянемо підгрупу H, породжену двома елементами a та b, тобто $H=\langle a,b\rangle$. Легко бачити, що $H=(A\cap H)\langle b\rangle$.

Введемо позначення: $A_1=A\cap H$. Тоді A_1 нормальний дільник в підгрупі H і $H=A_1\langle b\rangle$. Оскільки H - скінченно породжена підгрупа в групі G, то H - нільпотентна група. За теоремою із $[5]$, централізатор $C_{A_1}(b)$ елемента b в підгрупі A_1 відмінний від одиниці. Оскільки $C_{A_1}(b)\le C_A(b)$, то $C_A(b)$ також відмінний від одиниці. Так як $C_A(b)\le Z(G)$, то група G володіє нетривіальним центром Z_1.

Нехай у групі G побудовані члени верхнього центрального ланцюга Z_α для всіх $\alpha<\omega$. Якщо число ω - граничне, то покладемо, що Z_ω є об'єднанням всіх Z_α. Якщо число $\omega-1$ існує, то група $AZ_{\omega-1}/Z_{\omega-1}$; $A/(A\cap Z_{\omega-1})$ є абелевим нормальним дільником у фактор-групі $G/Z_{\omega-1}$ і група $G/Z_{\omega-1}$ є її розширенням за допомогою циклічної групи. За доведеним вище, центр групи $G/Z_{\omega-1}$ нетривіальний. Його прообраз в G позначемо через Z_ω. Отже, верхній центральний ланцюг групи G не може обірватися, доки не співпаде з самою групою G.

Лема 5. Нехай G - локально нільпотентна p група. Якщо група G задовольняє умову $\min-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп, то вона є черніковською.

Доведення. Нехай група G задовольняє умову $\min-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп. Тоді в групі G існує така неабелева субнормальна підгрупа H, в якій кожна субнормальна підгрупа нескінченного індексу є абелевою. Якщо A - максимальна абелева нормальна підгрупа в H, то у факто-групі H/A кожна неодинична нормальна підгрупа має скінченний індекс. Таким чином, фактор-група H/A задовольняє умові максимальності для нормальних підгруп. За теоремою Глушкова $[1]$, H/A - нільпотентна група зі скінченною кількістю твірних. Оскільки, згідно з $[7]$, нільпотентна $p-$група зі скінченною кількістю твірних є скінченною , то H/A - скінченна група. За лемою 4 одержуємо, що H - гіперцентральна група.

Нехай $H=H_1<H_2<\ldots<H_n=G$ - субнормальний ряд групи G. Фактор-групи $H_{i+1}/H_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ задовольняють умову мінімальності для субнормальних підгруп. Згідно з результатами, отриманими у $[6]$, фактор-групи $H_{i+1}/H_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ черніковські групи. Отже (див. $[7]$), фактор-групи $H_{i+1}/H_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ - розв'язні групи. Оскільки H_1-розв'язна і фактор-група H_2/H_1 - розв'язна, то і H_2 - розв'язна група. Використовуючи індукцію, легко встановити, що G - розв'язана група.

Розглянемо два випадки.

1.Комутант $G'=[G,G]$ - абелева група. Нехай B - максимальна абелева підгрупа, яка містить G'. Тоді B - нормальний дільник групи G, фактор група G/B - абелева і централізатор $C_G(B)=B$. З огляду на результати, отримані у $[6]$, фактор-група G/B - черніковська група.

2.Комутант G' групи G - неабелева група. Група G' містить абелеву підгрупу A. Фактор-група G'/A - черніковська. За індукцією доведемо, що G - черніковська група.

Теорема 1. Нехай G - періодична локально нільпоентна група. Якщо група G задовольняє умову $\min-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп, то вона черніковська.

Доведення. Відомо $[7]$, що періодична локально нільпотентна група G є прямим добутком локально силовських p - груп:

$$G=P_1\times P_2\times\ldots\times P_n\times\ldots .$$

Якщо в групі G існують неабелеві нескінченні силовські підгрупи, то нехай P_1 одна із них. За лемою 5 підгрупа P_1 - черніковська. Фактор-група G/P_1 задовольняє умові $\min-\infty$ для всіх субнормальних підгруп. Внаслідок теореми Курдаченко $[6]$, фактор-група G/P_1 - черніковська група. Отже, в цьому випадку G - черніковська група.

Теорема 2. Якщо локально нільпотентна група G без кручення задовольняє слабку умову мінімальності для субнормальних підгруп, то вона гіперцентральна і є розширенням абелевої групи з допомогою мінімаксної групи.

Доведення. Нехай група G задовольняє умову $\min-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп. За лемою 3 в групі G існує така неабелева субнормальна підгрупа H, в якій довільна субнормальна підгрупа нескінченного індексу є абелевою.

Якщо A - максимальна абелева нормальна підгрупа в групі H, то у фактор-групі H/A кожна неодинична нормальна підгрупа має скінченний індекс. Зокрема, у фактор-групі H/A виконується умова максимальності для нормальних підгруп. За теоремою Глушкова $[1]$, фактор-група H/A є нільпотентною групою зі скінченною кількістю твірних. Тоді фактор-група H/A або скінченна, або нескінченна циклічна група. За лемою 4 одержуємо, що H - гіперцентральна група.

Нехай $H=H_1\Delta H_2\Delta\ldots\Delta H_n=G$ - субнормальний ряд групи G. Фактор-групи $H_{i+1}/H_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ задовольняють умову $\min-\infty$ для всіх субнормальних підгруп із H_{i+1}/H_i. За теоремою Курдаченко $[6]$, фактор-група $H_{i+1}/H_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ мінімаксна. За доведеним вище, підгрупа H_1 - гіперцентральна, а фактор-група H_2/H_1 - мінімаксна. За теоремою Глушкова $[1]$, H_2 - гіперцентральна група.

Нехай тепер B - максимальна абелева нормальна підгрупа у групі G. Фактор-група G/B задовольняє умову $\min-\infty$ для всіх субнормальних підгруп. Дійсно, якщо X/B - неодинична субнормальна підгрупа в G/B, то X - субнормальна підгрупа в G. Оскільки $C_G(B)=B$, то B - максимальна абелева підгрупа в групі G, а, отже, X - неабелева субнормальна підгрупа. За теоремою Курдаченко $[6]$, фактор-група G/B - мінімаксна.

Теорема 3. Якщо локально нільпотентна група G задовольняє умову $\min-\infty$ для субнормальних підгруп, то вона є розширенням абелевої групи з допомогою мінімаксної групи.

Доведення. Нехай A - максимальна абелева нормальна підгрупа в G. Так як фактор-група G/Aзадовольняє умову $\min-\infty$ для всіх нормальних підгруп, то вона – гіперцентральна група за теоремою Курдаченко $[6]$. Таким чином, центр фактор-групи G/A відмінний від одиниці, тобто $Z(G/A)\neq 1$.

Нехай $\langle gA\rangle \le Z\langle G/A\rangle$. Тоді $A\langle g\rangle$ - неабелева підгрупа групи G. Оскільки фактор-група $G/A\langle g\rangle$ задовольняє умову $\min-\infty$ для субнормальних підгруп, то вона мінімаксна за теоремою Курдаченко $[6]$. З огляду на ізоморфізм $G/A\langle g\rangle \cong (G/A)/(A\langle g\rangle/A)$, фактор-група G/A - мінімаксна група.

$[1]$ Глушков В.М. О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп // Матем. Сборник. – 1952. – Т.30, №1. – С. 79-104.

$[2]$ Зайцев Д.И. Группы, удовлеторяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968.-Т.20, №4. – С. 472-482.

$[3]$ Зайцев Д.И. теории минимаксных груп // Укр. мат. журн. – 1971.-Т.23, №5. – С. 652-680.

$[4]$ Зайцев Д.И. Группы, удовлеторяющие слабому условию минимальности для неабелевих подгрупп// Укр. мат. журн. – 1971.-Т.23, №5. – С. 661-665.

$[5]$ Зайцев Д.И., Онищук В.А. О локально нильпотентных группах с централизатором, удовлеторяющим условию конечности // Укр. мат. журн. – 1991.-Т.43, №7-8. – С. 1048-1087.

$[6]$ Курдаченко Л.А. Группы, удовлеторяющие слабым условиям минимальности и максимальности для субнормальних подгрупп // Матем. заметки. – 1981. – Т. 29, №1. – С. 19-30.

$[7]$ Черников С.Н. Группы с заданием свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 382 с.