УДК 517.948; 517.52
Михальчук Б.Р., Михальчук Р.І., Дутчак Б.І.
Луцький національний технічний університет

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЮ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ, ОЦІНКУ ЗБІЖНОСТІ ТА ПОХИБКУ ОБЧИСЛЕННЯ

В класі скінченно-поверхових інтегральних ланцюгових дробів розглядається задача інтерполяції функціоналів $F \wedge Q[0;1] \to R^1$. *Вивчаються властивості інтерполяційного інтегрального дробу. Встановлено необхідні і достатні умови його існування. Дано оцінки збіжності та похибки обчислень.*

Ключові слова: *функціонал, інтерполяція, інтегральний ланцюговий дріб, функція Хевісайда, континуальні вузли, інтерполянт, правило підстановки.*

В побудові узагальнень теорії інтерполяції намітилось декілька напрямків. До першого напрямку слід віднести інтерполяцію нелінійних операторів та функціоналів в абстрактних просторах за допомогою інтегро-степеневих рядів (поліноміальних операторів) [1]. Ще одним напрямком розвитку вищезгаданої теорії є інтерполяція за допомогою неперервних ланцюгових дробів. В роботах [2,5] побудовані інтерполяційні формули для наближеного зображення функцій з n аргументами. При цьому було застосовано апарат гіллястих ланцюгових дробів, природнім узагальненням яких є інтегральний ланцюговий дріб (ІЛД) [2], [6]. Зауважимо, що в інтерполяційний поліном функціонал, що інтерполюється, входить лінійно. Виникає питання, чи існує розв'язок інтерполяційної задачі, в який функціонал, що інтерполюється входив би нелінійно. Для розв'язання поставленої задачі слід було знайти клас функціоналів, відмінних від інтегро-степеневих рядів. Таким класом виявився клас скінченноповерхових інтегральних ланцюгових дробів.

$$Q_n(x(\cdot)) = K_0 + \int_0^1 \cfrac{K_1(z_1)[x(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{1+\int_{z_1}^1 \cfrac{K_2(z_1,z_2)[x(z_2)-x_1(z_2)]dz_2}{1+ \cfrac{}{\ddots + \int_{z_{n-1}}^1 K_n(z_1,\ldots,z_n)[x(z_n)-x_{n-1}(z_n)]dz_n}}} \qquad (1)$$

Нехай $F(x(\cdot)) : Q[0,1] \to R^1$ функціонал, який діє з класу кусково-неперервних функцій із скінченою кількістю розривів першого роду $Q[0,1]$ на дійсну вісь R^1. Відомо значення $F\left(x(\cdot)\right)$ на континуальній множині інтерполяційних вузлів

$$x_n(z,\vec{\xi}^n) = \sum_{i=0}^{n} H(z-\xi_i)[x_i(z)-x_{i-1}(z)],$$

де $\vec{\xi}^n = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \bar{\Omega}_n = \left\{(t_1,t_2,\ldots,t_n) \in R^1 : 0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le 1\right\}$, $H(z)$ - функція Хевісайда, $\left\{x_i(z)\right\}_{i=0}^{n}$ - задана послідовність функцій з $Q[0,1]$, $x_{-1}(z) \equiv 0$, $\xi_0 = 0$.

Ставиться наступна інтерполяційна задача в класі ІЛД. Знайти такий ІЛД вигляду (1), який задовольняє інтерполяційним умовам на континуальних вузлах

$$Q_n(x_n(\cdot,\vec{\xi})) = F(x_n(\cdot,\vec{\xi}^n)), \quad \forall \xi^n \in \bar{\Omega}_n$$

Теорема 1. Нехай функціонал $F(x(\cdot)) : Q[0,1] \to \mathrm{R}^1$ є таким, що

$$\frac{\partial^n}{\partial\xi_1 \ldots \partial\xi_n} F(x^n(\cdot,\vec{\xi}^n)) \in Q(\bar{\Omega}_n)$$

Тоді для того, щоб n- поверховий ІЛД (1) був для нього інтерполяційним на континуальній множині вузлів $x^n(z,\vec{\xi}^{\,n}),\quad \forall \vec{\xi}^{\,n} \in \bar{\Omega}_n$, необхідно, щоб його ядра визначались формулами

$$K_0^I = F(x_0(\cdot)),$$

$$K_1^I(z_1) = -\frac{1}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\frac{\partial}{\partial z_1}F(x^1(\cdot,z_1)),$$

$$K_{2m}^I(\vec{z}^{\,2m}) = \prod_{i=1}^{m}\frac{x_{2i-1}(z_{2i-1})-x_{2i-2}(z_{2i-1})}{x_{2i}(z_{2i})-x_{2i-1}(z_{2i})}\times \tag{2}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial z_{2m}}\left\{K_{2m-1}^I(\vec{z}^{\,2m-1})\left(\frac{\partial}{\partial z_{2m-1}}K_{2m-2}^I(\vec{z}^{\,2m-2})\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_2}K_1^I(z_1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F[x^{2m}(\cdot,\vec{z}^{\,2m})]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right\},$$

$$m = 1,2,\ldots$$

$$K_{2m-1}^I(\vec{z}^{\,2m-1}) = -\frac{1}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{x_{2i}(z_{2i})-x_{2i-1}(z_{2i})}{x_{2i+1}(z_{2i+1})-x_{2i}(z_{2i+1})}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial z_{2m-1}}\left\{K_{2m-2}^I(\vec{z}^{\,2m-2})\left(\frac{\partial}{\partial z_{2m-2}}K_{2m-3}^I(\vec{z}^{\,2m-3})\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_2}K_1^I(z_1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F[x^{2m-1}(\cdot,\vec{z}^{\,2m-1})]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right\}$$

$$m = 2,3,\ldots$$

Як наслідок з попередньої теореми слідує

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми 1 і у класі ІЛД (1) існує інтерполянт (ІІЛД) для функціоналу $F(x(\cdot))$ на континуальній множині вузлів $x^n(z,\vec{\xi}^{\,n}),\quad \forall \vec{\xi}^{\,n} \in \bar{\Omega}_n$. Тоді він єдиний і його ядра визначаються за формулами (2).

При встановленні достатніх умов існування ІІЛД істотно використано «правило підстановки».

$$\int_{\xi_1}^{1}\frac{d}{dz_1}\left[F(x^2(\cdot,\vec{z}^{\,2}))\right]_{z_2=z_1}dz_1 = \tag{3}$$

$$= \int_{\xi_1}^{1}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\left[\frac{\partial}{\partial z_1}F(x^2(\cdot,\vec{z}^{\,2}))\right]_{z_2=z_1}dz_1,\quad \forall \xi_1 \in [0,1],$$

а також властивість функції Хевісайда

$$H(t-\xi)H(t-z) = H(t-z)\quad \forall \xi, z,\ 0 \le \xi \le z \le 1,\quad \forall t \in [0,1].$$

Наступна теорема встановлює зображення функціоналу, яке буде визначати необхідні і достатні умови справедливості «правила підстановки».

Теорема 3. Нехай функціонал $F(x(\cdot)) : Q[0,1] \to \mathbb{R}^1$ є таким, що

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}F\left(x_0(\cdot)+H(\cdot-z_1)\left(x_1(\cdot)-x_0(\cdot)\right)+H(\cdot-z_2)\left(x(\cdot)-x_1(\cdot)\right)\right) \in Q\left(\bar{\Omega}_{\vec{z}^{\,2}}\right)$$

$$\forall x_0(z),\, x_1(z),\, x(z) \in Q[0,1].$$

Тоді для того щоб було справедливим «правило підстановки» (3) необхідно і достатньо, щоб мало місце зображення

$$F(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \int_0^1 \frac{K_1^I(z_1)\left[x(z_1)-x_0(z_1)\right]dz_1}{1+\int_{z_1}^{1}K_2^R(z_1,z_2)\left[x(z_2)-x_1(z_2)\right]dz_2}. \tag{4}$$

Виходячи з формул (2) шляхом безпосердніх перетворень і методу індукції ядра ІЛД (1) можна подати загальною формулою наступного вигляду:

$$K_p^I(\vec{z}^{\,p}) = \frac{1}{x_{p-1}(z_p)-x_p(z_p)} \times \frac{\partial}{\partial z_{p-1}}\left(\frac{\partial}{\partial z_{p-2}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(x^{p-1}(\cdot,\vec{z}^{\,p-1}))\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z_p}\left(\frac{\partial}{\partial z_{p-1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(x^{p}(\cdot,\vec{z}^{\,p}))\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1} \qquad (5)$$

$$p = 3,4,\ldots, \quad K_0^I = F(x_0(\cdot)),$$

$$K_1^I(z_1) = \frac{1}{x_0(z_1)-x_1(z_1)}\frac{\partial}{\partial z_1}F(x^1(\cdot,z_1)),$$

$$K_2^I(\vec{z}^{\,2}) = \frac{1}{x_1(z_2)-x_2(z_2)}\frac{\partial}{\partial z_1}F(x^1(\cdot,z_1))\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(x^2(\cdot,\vec{z}^{\,2}))\right)^{-1}.$$

Спираючись на формули (5) і «правило підстановки» (3) доведена така

Теорема 4. Нехай функціонал $F(x(\cdot)): Q[0,1] \to \mathbb{R}^1$ є таким, що

$$\Phi_{n+1}(\vec{z}^{\,n+1}) \equiv \frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{n+1}} F\left(x_0(\cdot) + \sum_{p=1}^{n+1} H(\cdot - z_p)\left(x_p(\cdot) - x_{p-1}(\cdot)\right)\right) \in Q(\bar{\Omega}_{\vec{z}^{\,n+1}}),$$

і для нього має місце зображення (4). Тоді справедлива формула

$$F(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \int_0^1 \cfrac{K_1^I(\vec{z}^{\,1})\left[x(z_1)-x_0(z_1)\right]dz_1}{1+\int_{z_1}^1 \cfrac{K_2^I(\vec{z}^{\,2})\left[x(z_2)-x_1(z_2)\right]dz_2}{1+\begin{array}{c}\ddots \\ 1+\int_{z_{n-1}}^1 \cfrac{K_n^I(\vec{z}^{\,n})\left[x(z_n)-x_{n-1}(z_n)\right]dz_n}{1+\int_{z_n}^1 K_{n+1}^R(\vec{z}^{\,n+1})\left[x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1})\right]dz_{n+1}}\end{array}}}, \qquad (6)$$

де $K_{n+1}^R(\vec{z}^{\,n+1})$ визначається з формул (5) при $p = n+1, \quad x_{n+1}(z) = x(z)$.

Доведення теореми 4 детально наведено в [3], [4].

Розглянемо тепер питання збіжності ІЛД (1) при нескінченній кількості поверхів дробу. Для зручності записів будемо притримуватись позначень.

$$z_0 = 0; \quad \vec{z}^{\,i} = (z_1,\ldots,z_2), \quad a_i(\vec{z}^{\,i}) = K_i(\vec{z}^{\,i})[x(z_i)-x_{i-1}(z_i)],$$

$$q_0^{(n)} = Q_n(x(\cdot)) = K_0 + \int_0^1 \cfrac{a_1(z_1)dz_1}{1+\int_{z_1}^1 \cfrac{a_2(\vec{z}^{\,2})dz_2}{1+\begin{array}{c}\ddots \\ +\int_{z_{n-1}}^1 \cfrac{a_n(\vec{z}^{\,n})dz_n}{1}\end{array}}}, \qquad (7)$$

$$q_i^{(n)} = 1 + \int_{z_i}^1 \cfrac{a_{i+1}(\vec{z}^{\,i+1})dz_{i+1}}{1+\begin{array}{c}\ddots \\ +\int_{z_{n-1}}^1 a_n(\vec{z}^{\,n})dz_n\end{array}}$$ - підхідні дроби для (1),

При таких позначеннях буде справедливим співвідношення:

$$q_n^{(n)}=1;\quad q_i^{(n)}(\vec z^{\,i})=1+\int_{z_i}^{1}\frac{a_{i+1}(\vec z^{\,i+1})dz_{i+1}}{q_{i+1}^{(n)}(\vec z^{\,i+1})}$$

ІЛД (7) буде збігатись, якщо: $[q_i^{(n)}(\vec z^{\,i})]^{-1}$ існує для $i=\overline{1,n},\quad (n=\overline{1,\infty})$, послідовність $\{q_0^{(n)}\}$ має скінчену границю.

Тоді значення ІЛД (7) приймається рівним цій границі.

Має місце формула

$$q_0^{(n)}-q_0^{(m)}=(-1)^m\underbrace{\int_0^1\dots\int_{z_m}^1}_{(m+1)}\frac{\prod_{k=1}^{m+1}a_k(\vec z^{\,k})dz_k}{\prod_{k=1}^{m+1}q_k^{(n)}(\vec z^{\,k})\prod_{k=1}^{m}q_k^{(m)}(\vec z^{\,k})}\tag{8}$$

Теорема 5. Якщо в ІЛД (7) $\int_{z_i}^{1}\left|a_{i+1}(\vec z^{\,i+1})\right|dz_{i+1}\le\alpha\le\frac{1}{4}\quad(i=\overline{1,\infty})$, то цей дріб збіжний і

$$\left|q_0^{(n)}-q_0^{(m)}\right|\le\frac{2\int_0^1\left|K_1(z_1)(x(z_1)-x_0(z_1))\right|dz_1}{1+\sqrt{1-4\alpha}}\times\rho^m,$$

$$\text{де }\rho=\frac{4\alpha}{(1+\sqrt{1-4\alpha})^2}\le 1.$$

Доведення. Оцінимо величини $[q_i^{(n)}(\vec z^{\,i})]^{-1}$, починаючи з $n=i+1$:

$$\left|q_i^{(i+1)}(\vec z^{\,i})\right|^{-1}=\frac{1}{\left|1+\int_{z_i}^{1}a_{i+1}(\vec z^{\,i+1})dz_{i+1}\right|}\le\frac{1}{1-\int_{z_i}^{1}\left|a_{i+1}(\vec z^{\,i+1})\right|dz_{i+1}}\le\frac{1}{1-\alpha}.$$

По аналогії переконуємося в справедливості оцінок

$$\left|q_i^{(i+2)}(\vec z^{\,i})\right|^{-1}\le\frac{1}{1-\cfrac{\alpha}{1-\alpha}}\ ..$$

$$\left|q_i^{(n)}(\vec z^{\,i})\right|^{-1}\le\frac{1}{1-\cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\ddots}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\alpha})}=\frac{2}{1+\sqrt{1-4\alpha}}$$

Застосуємо тепер одержані співвідношення до оцінки (8).

$$\left|q_0^{(n)}-q_0^{(m)}\right|=\left|q_0^{(m+k)}-q_0^{(m)}\right|\le$$

$$\le\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4\alpha}}\right)^{2m+1}\alpha^m\int_0^1\left|a_1(z_1)\right|dz_1=\frac{2\int_0^1\left|a_1(z_1)\right|dz_1}{1+\sqrt{1-4\alpha}}\rho^m\xrightarrow[m\to\infty]{}0\quad(\rho<1),$$

що доводить першу частину теореми. А так як

$$\left|q_0^{(n)}-q_0^{(m)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|q_0^{(m+k)}-q_0^{(m)}\right|,\text{ то}$$

$$\left|q_0^{(n)}-q_0^{(m)}\right|\le\frac{2\int_0^1\left|K_1(z_1)(x(z_1)-x_0(z_1))\right|dz_1}{1+\sqrt{1-4\alpha}}\times\rho^m,\text{ де }\rho=\frac{4\alpha}{(1+\sqrt{1-4\alpha})^2}<1.$$

Теорему доведено.

Перейдемо тепер до оцінки похибки обчислення при інтерполяції функціоналів інтегральними ланцюговими дробами. Запровадимо наступні позначення

$$q_n^{(n)}(K_{n+1}^R;\vec z^{\,n}) = 1+\int_{z_n}^{1} K_{n+1}^R(\vec z^{\,n+1})\left[x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1})\right]dz_{n+1}$$

$$q_k^{(n)}(K_{n+1}^R;\vec z^{\,k}) = 1+\int_{z_k}^{1} \cfrac{K_{k+1}^I(\vec z^{\,k+1})\left[x(z_{k+1})-x_0(z_{k+1})\right]dz_{k+1}}{1+ \ddots + \int_{z_{n-1}}^{1} \cfrac{K_n^I(\vec z^{\,n})\left[x(z_n)-x_{n-1}(z_n)\right]dz_n}{1+\int_{z_n}^{1} K_{n+1}^R(\vec z^{\,n+1})\left[x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1})\right]dz_{n+1}}}$$

$q_k^{(n)}(\vec z^{\,k}) = q_k^{(n)}(0;\vec z^{\,k})$.

При таких позначеннях

$$\Delta F = \left|F(x(\cdot))-Q_n(x(\cdot))\right| \le \underbrace{\int_0^1\int_{z_1}^1\cdots\int_{z_{n-1}}^1}_{(n-1)} \frac{\prod_{k=1}^{n}\left|K_k^I(\vec z^{\,k})(x(z_k)-x_{k-1}(z_k))\right|}{\prod_{k=1}^{n-1}\left|q_k^{(n)}(K_{n+1}^R;\vec z^{\,k})\right|\prod_{k=1}^{n-1}\left|q_k^{(n)}(\vec z^{\,k})\right|}\times$$

$$\times\int_{z_n}^{1}\left|\frac{1}{1+\int_{z_n}^{1} K_{n+1}^R(\vec z^{\,n+1})\left[x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1})\right]dz_{n+1}}-1\right|dz_k .$$

Накладаючи різні умови на складові елементи останньої нерівності будемо отримувати різні оцінки похибки ΔF. Продемонструємо це на наступних теоремах.

Теорема 5. Якщо елементи інтерполяційного ІЛД для функціонала $F(x(\cdot))$ задовольняють умові

$$\int_{z_{i-1}}^{1}\left|K_i^I(\vec z^{\,i})(x(z_i)-x_{i-1}(z_i))\right|dz_i \le \alpha < \frac{1}{4}$$

і крім цього

$$\left(\left|1+\int_{z_k}^{1} K_{k+1}^I(\vec z^{\,k+1})(x(z_{k+1})-x_k(z_{k+1}))dz_{k+1}\right|\right)^{-1} \le 2,$$

то має місце оцінка

$$\Delta F \le \frac{3}{(1+\sqrt{1-4\alpha})^n}.$$

Доведення. На першому етапі доведення встановимо, що при умовах теореми $\left|q_k^{(n)}(K_{n+1}^R;\vec z^{\,k})\right| > \frac{1}{2}$. Оцінку проведемо починаючи з нижніх ланок ІЛД (7).

На другому етапі оцінимо вираз

$$\left|\left[1+\int_{z_n}^{1} K_{n+1}^R(\vec z^{\,n+1})(x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1}))dz_{n+1}\right]^{-1}-1\right| \le$$

$$\le 1+\left(1+\int_{z_n}^{1} K_{n+1}^R(\vec z^{\,n+1})(x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1}))dz_{n+1}\right)^{-1} \le 3.$$

При умовах теореми справедливою є подвійна нерівність

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4\alpha})=1-\cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\ddots}}\le\left|q_k^{(n)}(\vec{z}^{\,k})\right|\le 1+\cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\ddots}}=\frac{1}{2}(3-\sqrt{1-4\alpha})\,.$$

Застосувавши всі вище отримані оцінки, переконуємося в справедливості співвідношення

$$\Delta F\le\frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2}\right)^n}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{3}{(1+\sqrt{1-4\alpha})^n}\,.$$

Теорему доведено.

Теорема 6. Якщо в інтерполяційному ІЛД

$$\left|K_i^I(\vec{z}^{\,i})\right|\left|x(z_i)-x_{i-1}(z_i)\right|\le z_i<1\,,$$

а також виконується умова

$$\left|1+\int_{z_k}^{1}K_{k+1}^R(\vec{z}^{\,k+1})(x(z_{k+1})-x_k(z_{k+1}))dz_{k+1}\right|\ge\left|K_k^I(\vec{z}^{\,k})(x(z_k)-x_{k-1}(z_k))\right|,\text{ то}$$

$$\Delta F\le 2\underbrace{\int_0^1\int_{z_1}^1\ldots\int_{z_{n-2}}^1}_{(n-1)}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{dz_i}{\left|K_i^I(\vec{z}^{\,i})\right|\left|x(z_{i-1})-x_{i-1}(z_{i-1})\right|}\,.$$

Доведення. При умовах теореми для частинних знаменників інтерполяційного ІЛД справедливе співвідношення

$$\left|q_k^{(n)}(K_n^R;\vec{z}^{\,k})\right|\ge\left|K_k^I(\vec{z}^{\,k})\right|\left|x(z_k)-x_{k-1}(z_k)\right|,\quad (k=\overline{1,n})\quad\forall\vec{z}^{\,k}\in\Omega_k$$

А так як

$$\left|\left(1+\int_{z_n}^{1}K_{n+1}^R(\vec{z}^{\,n+1})(x(z_k)-x_k(z_k))dz_n\right)^{-1}-1\right|\le$$

$$\left(\left|K_n^I(\vec{z}^{\,n})(x(z_n)-x_{n-1}(z_n))\right|\right)^{-1}+1\le\frac{2}{\left|K_n^I(\vec{z}^{\,n})(x(z_n)-x_{n-1}(z_n))\right|}\,,$$

то одержуємо оцінку ΔF . Теорему доведено.

В частинному випадку, позначивши

$M=\min\limits_i\inf\limits_{\vec{z}^{\,i}}\left|K_i(\vec{z}^{\,i})(x(z_i)-x_{i-1}(z_i))\right|,\quad i=\overline{1,n}$, одержимо $\Delta F\le\dfrac{2}{M^n n!}$.

1. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. – Киев. Наукова думка. – 2000. – 406с.

2. Михальчук Р.И., Сявавко М.С. Континуальный аналог цепных дробей // Укр.мат.журн.-1982.-4, №5.-с.559-564.

3. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів. УМЖ. – 1999. – 51, №3. – С.364-375.

4. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Михальчук Б.Р., Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби, УМЖ

5. Кучминская Х.Й. Аппроксимация и интерполяция функций цепными ветвящимися дробями. Дис. на здобуття наук. ст. к.ф.-м.н., Львів, Наукова думка, 1976.

6. Сявавко М.С. Інтегральні ланцюгові дроби. – К.: Наукова думка, 1994. - с.205.