

УДК 539.3

К.В.Мельник, Н.В. Сахнюк, Н.В. Багнюк
 Луцький національний технічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ З УРАХУВАННЯМ ПРОЦЕСУ ВІДСТАВАННЯ ШТАМПУ ВІД ОСНОВИ

В роботі розроблено числовий метод дослідження контактної задачі для плит великої товщини. Приймається, що область контакту є малою порівняно з розмірами тіла, в зв'язку з цим розглянута задача про втискання плоского штампу у пружний півпростір.

Ключові слова: контактні напруження, пружний півпростір, жорсткий штамп переміщення, квадратичне програмування.

Розв'язання контактних задач з плоскою основою спрощується, оскільки відома наперед область контакту. В літературі [1-4] для такого класу задач розроблені ефективні аналітичні та числові методи дослідження контактних напружень під штампами різної форми. Проте відомо, що за дії додаткових сил, що прикладені поза область контакту, настає відставання штампу від основи. Тобто область контакту стає невідомою.

Контактні задачі з невідомою областю контакту значно складніші в математичному відношенні, оскільки вони є нелінійними. Загальний метод розв'язування такого класу задач на основі зведення їх до інтегральних рівнянь-нерівностей запропоновано в роботах А. Сінборіні. Досліджували контактні напруження на основі варіаційних методів Г. Фікер, А. С. Кравчук. Неваріаційний числовий метод на основі інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна був розроблений Б.А. Галановим.

У роботі розроблений числовий метод розрахунку напружено-деформованого стану контактної задачі для півпростору. Інтегральне рівняння першого роду, до якого зводиться контактна задача, замінюється дискретним аналогом і будується функціонал для величин, які визначені в області контакту. Основна відмінність від відомих постановок контактних задач, що постановка задачі виходить з інтегрального рівняння, яке задовольняє всім умовам теорії пружності, і ми задовольняємо лише умови контакту. Такий підхід дозволяє застосувати для розв'язання методи теорії оптимізації, а саме квадратичного програмування. Для оцінки точності запропонованої методики розглядаються відомі в літературі задачі.

Розглянемо випадок, коли поза штампами півпростір навантажений зусиллям $\sigma_{zz} = q(x, y)$ і враховуються сили тертя, що виникають під штампами (рис.1). Приймаємо, що штампи знаходяться в стані граничної рівноваги, коли на них діє горизонтальна сила $T^j = \rho P^j$, де ρ – коефіцієнт тертя, P^j – величина сили, що притискає j -ий штамп, $j = 1, N$. Під штампами має місце лінійне співвідношення між нормальним тиском і тангенціальним навантаженням, тоді дотичні напруження при $z = 0$ $\tau_{xz}^j = \rho \sigma_{zz}^j$, $\tau_{yz}^j = 0$. Інтегральне рівняння має вигляд:

$$\sum_j \lambda_j \iint_{D_j} \left(\frac{1}{R} + \beta_j \frac{x - \xi}{R^2} \right) p^j(\xi, \eta) d\xi d\eta = F^j(x, y) \quad (1)$$

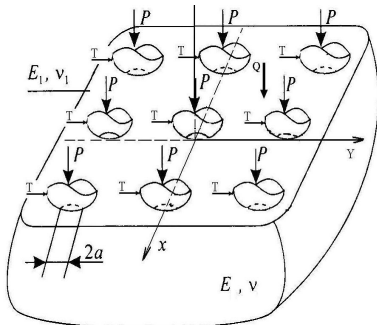


Рис. 1 Схема контакту системи штампів з півпростором

$$F^j(x, y) = -f^j(x, y) - g^j(x, y) + a^j x + b^j y + c^j - W(x, y)$$

$\lambda_j = \left(\frac{2(1-\nu_j^2)}{\pi E_j} + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \right)$, ν_j, E_j – коефіцієнт Пуассона, модуль Юнга для j -го штамп, ν, E – відповідні коефіцієнти для основи, $\beta_j = \frac{1-2\nu_j}{2(1-\nu_j)} \rho$, $z = f^j(x, y)$ – рівняння основи j -го штамп, $g^j(x, y)$ – рівняння поверхні основи в околі штамп, $W(x, y) = \lambda \int_{\Psi} \frac{q(\xi, \eta)}{R} d\xi d\eta$, Ψ – область, в якій

$q \neq 0$, D_j – область контакту під j -тим штампом, p^j – контактні напруження.

Основна складність при дослідженні контактної взаємодії штампів з гладкими основами та пружними тілами полягає в тому, що границя контакту наперед невідома.

У випадку невідомої області контакту інтегральне рівняння (1) запишемо у вигляді альтернативних інтегральних рівнянь-нерівностей [7]:

$$\sum_j \lambda_j \iint_{S_j} \left(\frac{1}{R} + \beta_j \frac{x-\xi}{R^2} \right) p^j(\xi, \eta) d\xi d\eta = F^j(x, y), \text{ при } p^j(\xi, \eta) < 0$$

$$\sum_j \lambda_j \iint_{S_j} \left(\frac{1}{R} + \beta_j \frac{x-\xi}{R^2} \right) p^j(\xi, \eta) d\xi d\eta \leq F^j(x, y), \text{ при } p^j(\xi, \eta) = 0$$
(2)

S_j - область, яка включає в себе D_j - область контакту j -го штампу.

Зазначимо, що в (2) невідомими є контактні напруження p^j та області D_j . Рівність буде мати місце в області контакту, а нерівність - поза нею. Дані співвідношення визначають умови сумісності переміщень в області контакту і поза нею. Перша рівність є умовою відсутності проміжку між контактуючими поверхнями, а нерівність є умовою відсутності контакту поза штампом.

Для числового визначення контактних напружень систему інтегральних рівнянь-нерівностей (2) замінено дискретним аналогом. У випадку, коли сталі c^j, a^j, b^j є задані, задача зводиться до [8]:

$$Y = \sum_{v=N_1}^{N_2} \sum_{\mu=M_1}^{M_2} C_{v,\mu} \left(\sum_j \lambda_j \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} (A_{v,\mu,n,m} p_{n,m}^j - F_{v,\mu}^j) p_{v,\mu}^j \right)$$
(3)

$$\sum_j \lambda_j \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} A_{v,\mu,n,m} p_{n,m}^j \leq F_{v,\mu}^j, \quad p_{n,m}^j \leq 0,$$
(4)

де $C_{v,\mu}$ – деякі додатні сталі, вибором яких може бути покращена збіжність розв'язку, коефіцієнти $A_{v,\mu,n,m}$ наведено в роботі [8]. У випадку, коли сталі c^j, a^j, b^j є невідомі, до умов (3) і (4) добавляємо додаткові умови:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} p_{n,m}^j = P^j / hH, \quad \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} y_m p_{n,m}^j = M_x^j / hH, \quad \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} x_n p_{n,m}^j = M_y^j / hH,$$
(5)

Величина Y при виконанні умов (4) є додатною величиною, і при знайдених контактних напруження набуває свого мінімального значення ($Y = 0$). Отже, якщо будуть знайдені значення сталей $p_{n,m}$ такі, що мінімізують (3) при умовах (4), і при цьому значення Y виявиться близьким до нуля, то вони є значеннями контактних напружень у вузлових точках. У запропонованому підході задача визначення контактних напружень зведена до задачі квадратичного програмування (3-4), для якої в літературі розроблені ефективні чисельні алгоритми [6]. Зазначимо, що наперед невідома область контакту знаходиться в процесі розрахунків – це область, в якій знайдені значення $p_{n,m} < 0$ [3].

Розглянута задача про втиснення в пружній ізотропний півпростір абсолютно жорсткого штампу, що має форму вузького прямокутника довжиною $2a$ і шириною 2δ , причому $\varepsilon = \delta / a \ll 1$. Сила P проходить через центр ваги штампу і він не повертається. Припустимо, що між штампом і півпростором тертя не виникає, і відсутнє навантаження поза штампом. В роботах [30] розв'язок інтегрального рівняння (2.1) пропонується шукати у вигляді:

$$p(x, y) = \frac{P(x)}{\pi \sqrt{\delta^2 - y^2}}, \quad |x| < a, \quad |y| < \delta,$$
(6)

припускаючи що $F(x, y) \equiv g(x)$. Підставляючи (6) в (1) і обчислюючи інтеграла по η , отримують:

$$\frac{\lambda}{2} \int_{-a}^a p(\xi) M(\xi - x) d\xi = g(x), \quad M(t) = (\delta^2 + t^2)^{-1/2} K(\delta(\delta^2 + t^2)^{-1/2}), \quad (7)$$

де $K(e)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду. В роботі Галіна Л.А. показано, що

$$\frac{G}{1-\nu} g(x) / p(x) \sim \ln(a/\delta) \text{ при } a/\delta \rightarrow \infty.$$

В роботах [9] рівняння (7) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Регулярна частина ядра $M(t)$ апроксимується поліномом, і задача зводиться до розв'язку нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Запропонований метод ефективний лише при достатньо великому значенню параметра ε , а при малих $\varepsilon \leq 0,1$ можна використати асимптотичний метод « малих λ » [3].

Проведено розрахунки при $\varepsilon = \delta/a = 0,2$, крок розбиття сітки покладали $h/a = 0,035$, $H/a = 0,008$. На рис. 2, б-3, б наведені безрозмірні величини $-\pi p(x/a, y/a)/P$, розраховані за формулами (3-5), в діаметральному перерізі штапу, паралельному осі Ox . На рис. 2 а-3, а проведено порівняння з розв'язками, отриманими в роботах [10, 1], при різних значеннях параметра ε . Лінією 3 наведені розраховані величини $-\pi p(x/a, y/a)/P$ при $y/a = 0$, штриховою лінією 2 - величини $\pi \delta p(ax)/P$, представлені в роботі [10], з використанням асимптотичного методу « малих λ », а лінією 1 величини $ap(x)/P$ [1], що є розв'язком нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

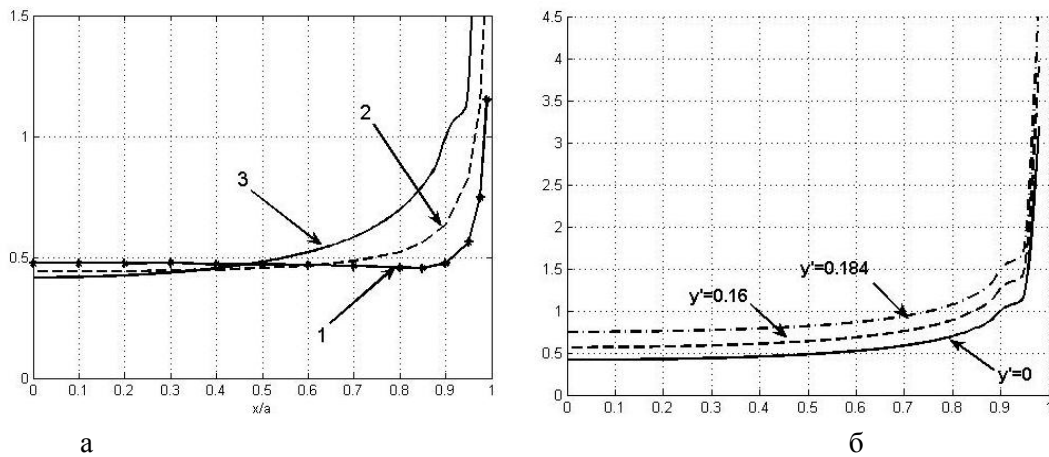


Рис. 2 Прямокутний плоский штамп при $\varepsilon = 0,2$

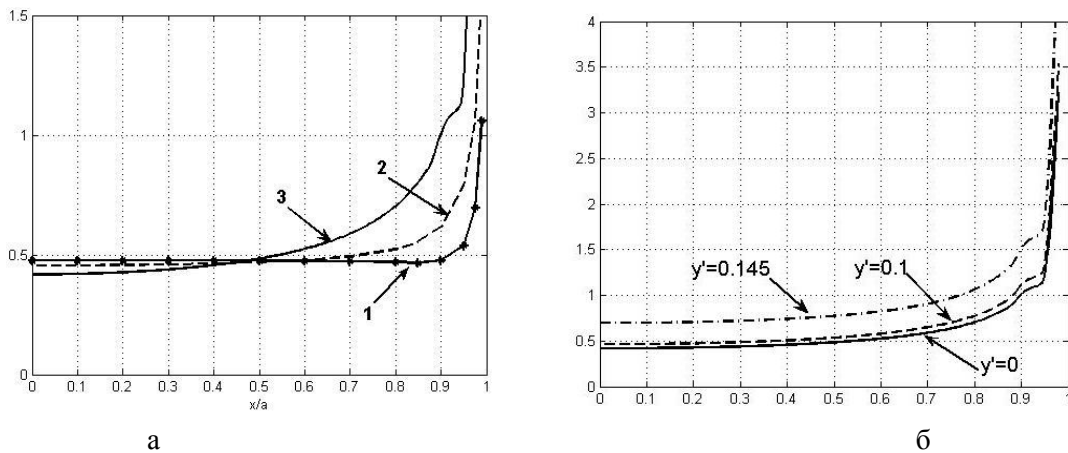


Рис. 3 Прямокутний плоский штамп при $\varepsilon = 0,15$

З наведених рисунків видно, що в центральній частині області контакту знайдені різними методами контактні напруження практично збігаються.

В таблиці 2.2 наведені величини $-\pi p(x/a, 0)/P$ для різних значень параметра ε .

Значення величин $-\frac{1}{P}\pi\epsilon\rho(x/a,0)$

x/a	ϵ			
	0,05	0,1	0,15	0,2
0	0,4494	0,4339	0,4179	0,416
0,105	0,4521	0,4363	0,4201	0,418
0,21	0,4597	0,4439	0,4276	0,426
0,315	0,4737	0,4576	0,4405	0,438
0,42	0,4959	0,4788	0,461	0,459
0,525	0,5293	0,511	0,4921	0,489
0,63	0,5811	0,5606	0,5399	0,537
0,7	0,6327	0,6106	0,588	0,584
0,805	0,7653	0,738	0,7108	0,705
0,91	1,1408	1,094	1,0537	1,045
0,945	1,2152	1,1815	1,1377	1,127
0,98	3,4588	3,3452	3,2213	3,191

З наведених рис.2-3 видно, що на відстані $|x| \leq a/2$ розглянуті методи майже співпадають. Метод квадратичного програмування ефективний при великому параметрі ϵ , і не претендує на правильність поблизу кутових точок штампу.

Дослідження впливу навантаження, що прикладене поза штампом. Нехай поза штампом півпростір навантажений зосередженою силою Q , що прикладена в точці $(l', m', 0)$, де значення l', m' представлені формулами:

$$x' = \frac{x}{a_1}, \quad y' = \frac{y}{a_1}, \quad c' = \frac{c}{a_1}, \quad l' = \frac{l}{a_1}, \quad |P_c| = \frac{P}{\pi a_1^2}, \quad m' = \frac{m}{a_1} \quad (8)$$

В якості параметра a_1 взято довжину вузького прямокутника a . Переміщення, яке виникає в наслідок додаткового навантаження, визначається формулами $W(x, y) = \frac{\lambda Q}{R_0}$ і входить в інтегральне рівняння (1). Розрахунки проведені при відношенні сил $Q/P = 1$ і $\epsilon = 0,15$. На рис.2.23 представлені лінії рівня вздовж осі Oy величин $\pi\epsilon\rho(x/a, y/a)/P$ і область контакту у випадку, коли сила Q прикладена в точці з координатами $l' = 1,5$ і $m' = 0$.

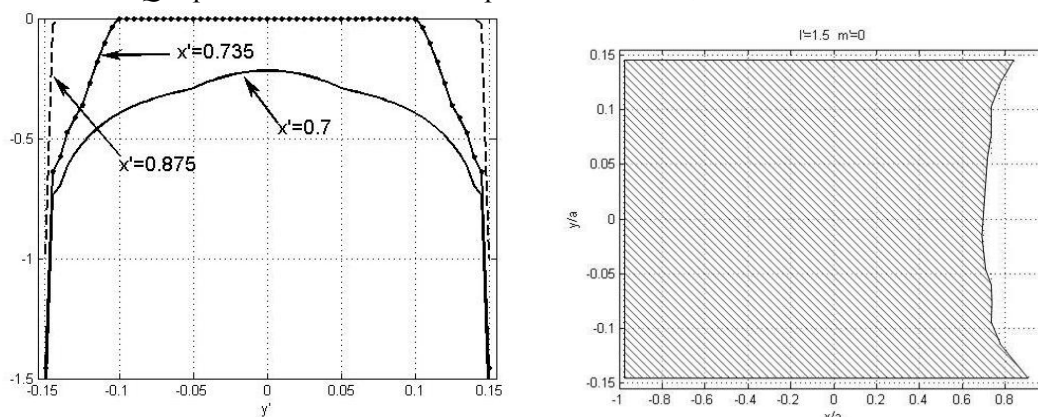


Рис. 4 Прямокутний плоский штамп при відношенні сторін $\epsilon = 0,15$. Вплив додаткового навантаження Q в точці $l = 1,5a, m = 0$

На рис.5 представлені аналогічні розрахунки для випадку зміщення точки прикладання сили Q $l' = 1,5, m' = 0,1$.

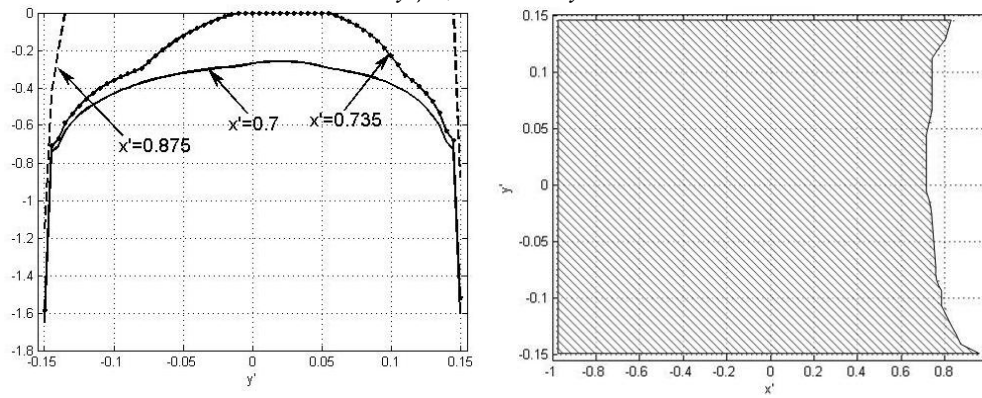


Рис. 5 Прямокутний плоский штамп при відношенні сторін $\varepsilon = 0,15$. Вплив додаткового навантаження Q в точці $l' = 1,5$, $m' = 0,1$

З проведених розрахунків видно, що область відставання штампа від основи більша для вузького прямокутника, відношення сторін якого $\varepsilon = 0,15$. При зміні точки прикладання сили, область відставання зміщується.

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.272 с.
5. Фикер Г. Теоремы существования в теории упругости. М., 1974.
6. Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge University Press. 1985.
7. Signorini. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // Rend. Di Matem/ e delle sue appl., 1959. V. 18, № 1-2.P. 95-139.
8. Маркова К. В. Дослідження контактних напружень під штампами складної форми з врахуванням відлипання. Матеріали конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», у 3-х томах, Львів 2008. - с. 2.61-2.63.
9. Бородачев Н. М. Контактная задача для штампа с основанием в виде узкого прямоугольника / Бородачев Н. М., Галин Л. А. // ПММ.— 1974. —Т. 38. Вып. 1. С. 125 — 130.
10. Александров В. М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел./ Александров В. М., Пожарский Д. А. — М.: Изд - во «Факториал», 1998. — 288 с.