УДК 517.956
О.В.Лисенко
Луцький національний технічний університет

ОЦІНКА ЗНИЗУ ПЕРШОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ БІГАРМОНІЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТОРІ E^3

В роботі розглядається перша гранична задача бігармонійного рівняння в просторі E^3. *Використовуючи методику, яка раніше дозволила нам розв'язати аналогічну задачу на площині* E^2, *оцінили знизу найменше власне значення.*

Ключові слова: *власне значення, бігармонійне рівняння, граничні умови.*

Розглядається метод знаходження першого власного числа задачі

$$\Delta^2 u - \lambda^4 u = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

заданій в опуклому тілі Ω з гладкою границею $\partial\Omega$. Апроксимуємо тіло зовні многогранником. Нехай т. Q - точка мінімумів функціоналів [1]:

$$B(Q) = \sum_p \frac{S_p}{h_p}, \qquad B = \min_Q B(Q);$$

$$m(Q) = \sum_p \frac{S_p}{h_p^2}, \qquad m = \min_Q m(Q),$$

де S_p - площа p-ої грані многогранника, а h_p - віддаль від точки Q до p-ої грані. Переходимо до сферичних координат (r,θ,φ) з центром в точці Q. Оскільки оператор Лапласа в цих координатах має вигляд

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

а бігармонійний оператор це $\Delta^2 \equiv \Delta(\Delta)$, то з рівняння (1) отримаємо

$$\begin{aligned}\lambda_1^4 = \frac{1}{u}\Bigg\{&\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{4}{r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{r^4}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4} + 2ctg\theta\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} - ctg^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + ctg\theta\left(3+ctg^2\theta\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] + \\ &+ \frac{1}{r^4\sin^4\theta}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^2\partial\theta^2} + ctg\theta\frac{\partial^3 u}{\partial r^2\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^4 u}{\partial r^2\partial\varphi^2}\right) + \\ &+ \frac{2}{r^4\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\varphi^2} - ctg\theta\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^2\partial\theta}\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{3}$$

де $u \in C^4[\Omega]$ і задовольняє граничним умовам (2).

Якщо ввести функції

$$\begin{aligned}&B_1 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}; &&B_2 = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial r}; &&B_3 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3};\\ &B_4 = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial\theta}; &&B_5 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^3}; &&B_6 = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial\varphi};\\ &B_7 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial r^2\partial\theta}; &&B_8 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial r\partial\varphi^2}; &&B_9 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^2\partial\theta},\end{aligned} \tag{4}$$

то прийдемо до рівняння:

$$\lambda_1^4 = \frac{\partial B_1}{\partial r} + B_1 B_2 + \frac{4}{r} B_1 + \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial B_3}{\partial \theta} + B_3 B_4 + 2ctg\theta B_3\right) - \frac{ctg^2\theta}{r^4}\left(\frac{\partial B_4}{\partial \theta} + B_4^2 - \frac{ctg^2\theta + 3}{ctg\theta} B_4\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^4 \sin^4\theta}\left(\frac{\partial B_5}{\partial \varphi} + B_5 B_6\right) + \frac{4}{r^4 \sin^4\theta}\left(\frac{\partial B_6}{\partial \varphi} + B_6^2\right) + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial B_7}{\partial \theta} + B_7 B_4 + ctg\theta B_7\right) + \qquad (5)$$
$$+ \frac{2}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial B_8}{\partial r} + B_8 B_2\right) + \frac{2}{r^4 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial B_9}{\partial \theta} + B_9 B_4 - ctg\theta B_9\right),$$

де $r \ge 0, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$.

Приступаємо до конструктивної побудови функцій B_i, $i = \overline{1,9}$. Для цього з'єднаємо точку Q з гранями многогранника; розіб'ємо тіло Ω на частини Ω_p, а проекцію точки Q на p-ту грань буде точка $M_p\left(h_p, \theta_p, \varphi_p\right)$.

Розглянемо функції

$$\psi = \frac{br\cos\alpha_p}{h_p}, \qquad H_{\frac{1}{2}}(x) = w'_{\frac{1}{2}}(b)\,\omega_{\frac{1}{2}}(x) - \omega'_{\frac{1}{2}}(b)\,w_{\frac{1}{2}}(x), \qquad (6)$$

де b - найменший додатній корінь рівняння

$$w'_{\frac{1}{2}}(x)\,\omega_{\frac{1}{2}}(x) - \omega'_{\frac{1}{2}}(x)\,w_{\frac{1}{2}}(x) = 0, \qquad (7)$$

$\omega_{\frac{1}{2}}(x)$ - розв'язок рівняння Лапласа

$$\omega'' + \frac{2\nu + 1}{x}\omega' + \omega = 0, \qquad (8)$$

а $w_{\frac{1}{2}}(x)$ - розв'язок рівняння

$$w'' + \frac{2\nu + 1}{x}w' - w = 0, \qquad (9)$$

яке ми назвали модифікованим рівнянням Лапласа; як і в роботі [2], про власні значення в просторі,

$$\cos\alpha_p = \sin\theta_p \sin\theta \cos\left(\varphi - \varphi_p\right) + \cos\theta_p \cos\theta.$$

Таким чином побудована функція $H_{\frac{1}{2}}(\psi)$ задовольняє граничним умовам (2). Якщо тепер покласти $B_3 = B_4 = B_5 = \ldots = B_9 = 0$, то рівняння (5) прийме вигляд

$$\frac{\partial B_1}{\partial r} + B_1 B_2 + \frac{4}{r} B_1 = \lambda_1^4. \qquad (10)$$

Логічно за u взяти функцію $H_{\frac{1}{2}}(\psi)$. Функції B_1 і B_2, які тепер приймуть вигляд

$$B_1 = \frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = \frac{1}{H_{\frac{1}{2}}}\frac{b^3\cos^3\alpha_p}{h_p^3} H'''_{\frac{1}{2}} = \frac{b^3\cos^3\alpha_p}{h_p^3}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)},$$

$$B_2 = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{H_{\frac{1}{2}}}\frac{b\cos\alpha_p}{h_p} H'_{\frac{1}{2}} = \frac{b\cos\alpha_p}{h_p}\frac{H'_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}$$

підставимо в рівняння (10):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{b^3\cos^3\alpha_p}{h_p^3}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}\right)+\frac{b^3\cos^3\alpha_p}{h_p^3}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}\frac{b\cos\alpha_p}{h_p}\frac{H'_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}+\frac{4}{r}\frac{b^3\cos^3\alpha_p}{h_p^3}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}(\psi)}{H_{\frac{1}{2}}(\psi)}=\lambda_1^4$$

і отримаємо

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}\frac{H^{(4)}_{\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{2}}-H'''_{\frac{1}{2}}H'_{\frac{1}{2}}}{H^2_{\frac{1}{2}}}+\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}H'_{\frac{1}{2}}}{H^2_{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{r}\frac{b^3\cos^3\alpha_p}{h_p^3}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}}{H_{\frac{1}{2}}}=\lambda_1^4.$$

Звідки

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}\frac{H^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{H_{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{r}\frac{b^3\cos^3\alpha_p}{h_p^3}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}}{H_{\frac{1}{2}}}=\lambda_1^4,$$

або

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}\left(\frac{H^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{H_{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{r}\frac{h_p}{b\cos\alpha_p}\frac{H'''_{\frac{1}{2}}}{H_{\frac{1}{2}}}\right)=\lambda_1^4.$$

Якщо згадати вираз ψ, то останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}\left[H^{(4)}_{\frac{1}{2}}+\frac{4}{\psi}H'''_{\frac{1}{2}}\right]=\lambda_1^4H_{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

або, з врахуванням співвідношень (6),

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}\left[w'_{\frac{1}{2}}(b)\left(\omega^{(4)}_{\frac{1}{2}}+\frac{4}{\psi}\omega'''_{\frac{1}{2}}\right)-\omega'_{\frac{1}{2}}(b)\left(w^{(4)}_{\frac{1}{2}}+\frac{4}{\psi}w'''_{\frac{1}{2}}\right)\right]=\lambda_1^4H_{\frac{1}{2}}.$$

Виходячи з рівнянь (8) та (9), легко отримати, що

$$\omega^{(4)}_{\frac{1}{2}}+\frac{4}{\psi}\omega'''=\omega_{\frac{1}{2}}, \qquad \text{а} \quad w^{(4)}_{\frac{1}{2}}+\frac{4}{\psi}w'''_{\frac{1}{2}}=w_{\frac{1}{2}},$$

а тому рівняння (11), якщо врахувати (6) та (7), прийме вигляд

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}H_{\frac{1}{2}}=\lambda_1^4H_{\frac{1}{2}}$$

або

$$\frac{b^4\cos^4\alpha_p}{h_p^4}=\lambda_1^4. \tag{12}$$

З останнього співвідношення, аналогічно тому, як це зроблено в [2] і [3], отримаємо ефективну геометричну оцінку для першого власного значення

$$\lambda_1^4\ge\left(\frac{b^2B}{3V}\frac{4\pi}{m}\right)^2, \tag{13}$$

де V - об'єм тіла Ω.

1. Пойя Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336с.

2. И.В.Коробчук, О.В.Лысенко Собственные значения оператора Лапласа в пространстве E^3. Деп. в Укр НИИНТИ, 12.08.88, №1973 Ук 88, с.3-6.

3. И.В.Коробчук, О.В.Лысенко Собственные значения бигармонического оператора на плоскости. Деп. в Укр НИИНТИ, 04.11.89, №2447 Ук 89, с.2-5.