УДК 517.926
Б.І.Дутчак, Р.І.Михальчук
Луцький національний технічний університет

ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-ГО ПОРЯДКУ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ВІДПОВІДНИХ ЇМ СИСТЕМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглядаються звичайні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, які можуть бути про інтегровані, шляхом зведення їх до рівнянь з постійними коефіцієнтами. Встановлено зв'язок між коефіцієнтами диференціального рівняння та елементами матриці відповідної йому системи.

Ключові слова: диференціальні рівняння, перетворення Лапласа, визначальна функція, слід, визначник.

§1. Інтегровані звичайні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами

Як було показано в [1] досить широкий клас звичайних лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

$$a_0(x)\frac{d^n y(x)}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy(x)}{dx}+a_n y(x)=0 \qquad (1.1)$$

можна привести до лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$C_0\frac{d^n\tilde{y}(z)}{dz^n}+C_1\frac{d^{n-1}\tilde{y}(z)}{dz^{n-1}}+\ldots+C_{n-1}\frac{d\tilde{y}(z)}{dz}+C_n\tilde{y}(z)=0. \qquad (1.2)$$

Тут $\tilde{y}(z)=\tilde{y}(f(x))$. При цьому використана заміна незалежної змінної

$$z=f(x), \qquad (1.3)$$

де $f(x)$ довільна неперервна функція визначена на $x\in[x_0;+\infty)$, диференційовна до n-го порядку включно і така, що $f'(x)\neq 0$ при $x\in[x_0;+\infty)$.

Згідно з [2] функцію $f(x)$ будемо називати визначальною.

Процес знаходження загального розв'язку рівняння (1.1) полягає в наступному:

I) Знаходимо загальний розв'язок рівняння (1.2)

$$\tilde{y}(z)=\varphi(K_1,K_2,\ldots,K_n,z), \qquad (1.4)$$

де K_i, $i=\overline{1,n}$ довільні постійні.

II) Підставивши в (1.4) функцію (1.3) і врахувавши, що $\tilde{y}(f(x))=y(x)$, отримаємо загальний розв'язок рівняння (1.1)

$$y(x)=\varphi[K_1,K_2,\ldots,K_n,f(x)].$$

Викликає цікавість навести загальний вигляд рівняння (1.1), яке може бути приведене до диференціального рівняння (1.2) за допомогою заміни (1.3). Для довільного n це зробити дуже складно, тому приведемо вигляд рівнянь (1.1) для найбільш поширених $n=2;3;4$.

Так при $n=2$ рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{1}{[f'(x)]^2}\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\left\{\frac{C_1}{C_0 f'(x)}-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}\frac{dy(x)}{dx}+\frac{C_2}{C_0}y(x)=0 \qquad (1.5)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.5), згідно з [1], у випадку дійсних і різних коренів $r_1\neq r_2$ характеристичного рівняння

$$C_0r^2+C_1r+C_2=0 \qquad (1.6)$$

буде мати вигляд

$$y(x)=K_1e^{r_1f(x)}+K_2e^{r_2f(x)}, \qquad (1.7)$$

де K_1 і K_2 - довільні постійні.

Якщо корені характеристичного рівняння (1.6) дійсні і рівні, тобто $r_1=r_2=r$, то загальним розв'язком рівняння (1.5) буде функція

$$y(x)=\left[K_1 f(x)+K_2\right]\cdot e^{rf(x)}. \qquad (1.8)$$

У випадку комплексних коренів рівняння (1.6)

$r_1=\alpha+i\beta,\quad r_2=\alpha-i\beta$, загальним розв'язком рівняння (1.5) буде функція

$$y(x)=e^{\alpha f(x)}\left\{K_1\sin\left[\beta\cdot f(x)\right]+K_2\cos\left[\beta\cdot f(x)\right]\right\}, \qquad (1.9)$$

або функція

$$y(x)=Ae^{\alpha f(x)}\sin\left[\beta\cdot f(x)+\gamma\right], \qquad (1.10)$$

де

$$\begin{cases} A=\sqrt{K_1^2+K_2^2}, \\ \gamma=arctg\,\dfrac{K_2}{K_1}. \end{cases} \qquad (1.11)$$

При $n=3$ рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{1}{\left[f'(x)\right]^3}\frac{d^3y(x)}{dx^3}+\left\{\frac{C_1}{C_0\left[f'(x)\right]^2}-\frac{3f''(x)}{\left[f'(x)\right]^4}\right\}\frac{d^2y(x)}{dx^2}+$$

$$+\left\{\frac{C_2}{C_0 f'(x)}-\frac{C_1 f''(x)}{C_0\left[f'(x)\right]^3}+\frac{3\left[f''(x)\right]^2-f'(x)f'''(x)}{\left[f'(x)\right]^5}\right\}\frac{dy(x)}{dx}+\frac{C_3}{C_0}y(x)=0 \qquad (1.12)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.12) у випадку дійсних і різних коренів $r_1\neq r_2\neq r_3$ характеристичного рівняння

$$C_0r^3+C_1r^2+C_2r+C_3=0 \qquad (1.13)$$

буде мати вигляд

$$y(x)=K_1e^{r_1f(x)}+K_2e^{r_2f(x)}+K_3e^{r_3f(x)}, \qquad (1.14)$$

де K_1, K_2 і K_3 - довільні постійні.

Якщо серед дійсних коренів характеристичного рівняння (1.13) два рівні між собою, тобто $r_1=r_2\neq r_3$, то загальним розв'язком рівняння (1.12) буде функція

$$y(x)=\left[K_1 f(x)+K_2\right]\cdot e^{r_1f(x)}+K_3e^{r_3f(x)}. \qquad (1.15)$$

Якщо ж три корені дійсні і рівні, тобто $r_1=r_2=r_3=r$, то загальний розв'язок буде мати вигляд

$$y(x)=\left[K_1\left[f(x)\right]^2+K_2 f(x)+K_3\right]\cdot e^{rf(x)}. \qquad (1.16)$$

У випадку двох комплексних коренів $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$ і одного дійсного r_3 загальний розв'язок буде мати вигляд

$$y(x)=e^{\alpha f(x)}\left\{K_1\sin\left[\beta f(x)\right]+K_2\cos\left[\beta f(x)\right]\right\}+K_3e^{r_3f(x)}, \qquad (1.17)$$

або

$$y(x)=Ae^{\alpha f(x)}\sin\left[\beta\cdot f(x)+\gamma\right]+K_3e^{r_3f(x)}, \qquad (1.18)$$

де A та γ задаються формулою (1.12).

У випадку $n=4$ рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{1}{\left[f'(x)\right]^4}\frac{d^4y(x)}{dx^4}+\left\{\frac{C_1}{C_0\left[f'(x)\right]^3}-\frac{6f''(x)}{\left[f'(x)\right]^5}\right\}\frac{d^3y(x)}{dx^3}+$$

$$+\left\{\frac{C_2}{C_0\left[f'(x)\right]^2}-\frac{3C_1f''(x)}{C_0\left[f'(x)\right]^4}+\frac{15\left[f''(x)\right]^2-4f'(x)f'''(x)}{\left[f'(x)\right]^6}\right\}\times$$

$$\times\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\left\{\frac{C_3}{C_0f'(x)}-\frac{C_2f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3}+\frac{C_1\left[3\left[f''(x)\right]^2-f'(x)f'''(x)\right]}{\left[f'(x)\right]^5}-\right.$$

$$\left.-\frac{15\left[f''(x)\right]^3+\left[f'(x)\right]^2f^{IV}(x)-10f'(x)f''(x)f'''(x)}{\left[f'(x)\right]^7}\right\}\frac{dy(x)}{dx}+\frac{C_4}{C_0}y(x)=0 \qquad (1.19)$$

а відповідне йому характеристичне рівняння прийме форму

$$C_0r^4+C_1r^3+C_2r^2+C_3r+C_4=0\,. \qquad (1.20)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1.19) у випадку дійсних і різних коренів $r_1\neq r_2\neq r_3\neq r_4$, дійсних і двох рівних коренів $r_1=r_2\neq r_3\neq r_4$, дійсних і трьох рівних коренів $r_1=r_2=r_3\neq r_4$ і всіх рівних між собою дійсних коренів $r_1=r_2=r_3=r_4$ відповідно має вигляд

$$y(x)=\sum_{i=1}^{4}K_ie^{r_if(x)}\,, \qquad (1.21)$$

$$y(x)=\left[K_1f(x)+K_2\right]e^{r_1f(x)}+K_3e^{r_3f(x)}+K_4e^{r_4f(x)}, \qquad (1.22)$$

$$y(x)=\left\{K_1\left[f(x)\right]^2+K_2f(x)+K_3\right\}e^{r_1f(x)}+K_4e^{r_4f(x)}, \qquad (1.23)$$

$$y(x)=\left\{K_1\left[f(x)\right]^3+K_2\left[f(x)\right]^2+K_3f(x)+K_4\right\}e^{r_1f(x)}, \qquad (1.24)$$

де K_i, $i=\overline{1,4}$ - довільні константи.

Якщо характеристичне рівняння має два дійсні корені r_1 і r_2 та два комплексні корені $r_3=\alpha+i\beta$, $r_4=\alpha-i\beta$ то загальним розв'язком рівняння (1.19) будуть функції

$$y(x)=K_1e^{r_1f(x)}+K_2e^{r_2f(x)}+e^{\alpha f(x)}\left\{K_3\sin\left[\beta f(x)\right]+K_4\cos\left[\beta f(x)\right]\right\} \qquad (1.25)$$

або

$$y(x)=K_1e^{r_1f(x)}+K_2e^{r_2f(x)}+Ae^{\alpha f(x)}\sin\left[\beta f(x)+\gamma\right], \qquad (1.26)$$

де

$$\begin{cases}A=\sqrt{K_3^2+K_4^2},\\ \gamma=arctg\dfrac{K_4}{K_3}.\end{cases} \qquad (1.27)$$

У випадку $r_1=r_2$ маємо

$$y(x)=\left[K_1f(x)+K_2\right]e^{r_1f(x)}+e^{\alpha f(x)}\left\{K_3\sin\left[\beta f(x)\right]+K_4\cos\left[\beta f(x)\right]\right\} \qquad (1.28)$$

або

$$y(x)=\left[K_1f(x)+K_2\right]e^{r_1f(x)}+Ae^{\alpha f(x)}\sin\left[\beta f(x)+\gamma\right], \qquad (1.28')$$

де A та γ задаються формулами (1.27).

Якщо всі корені характеристичного рівняння комплексні, тобто $r_1=\alpha_1+i\beta_1$, $r_2=\alpha_1-i\beta_1$, $r_3=\alpha_2+i\beta_2$, $r_4=\alpha_2-i\beta_2$, то загальним розв'язком диференціального рівняння (1.19) будуть функції

$$\begin{aligned}y(x)&=e^{\alpha_1f(x)}\left\{K_1\sin\left[\beta_1f(x)\right]+K_2\cos\left[\beta_1f(x)\right]\right\}+\\&+e^{\alpha_2f(x)}\left\{K_3\sin\left[\beta_2f(x)\right]+K_4\cos\left[\beta_2f(x)\right]\right\}\end{aligned} \qquad (1.29)$$

або

$$y(x) = A_1 e^{\alpha_1 f(x)} \sin\left[\beta_1 f(x) + \gamma_1\right] + A_2 e^{\alpha_2 f(x)} \sin\left[\beta_2 f(x) + \gamma_2\right] \tag{1.30}$$

де A_1, γ_1 та A_2, γ_2 задаються відповідно формулами (1.11) та (1.27).

Якщо всі корені характеристичного рівняння комплексні і кратні, тобто $r_1 = r_3 = \alpha + i\beta$ і $r_2 = r_4 = \alpha - i\beta$, то загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція

$$y(x) = \left[K_1 f(x) + K_2\right] e^{\alpha f(x)} \left\{K_3 \sin\left[\beta f(x)\right] + K_4 \cos\left[\beta f(x)\right]\right\} \tag{1.31}$$

або

$$y = A\left[K_1 f(x) + K_2\right] e^{\alpha f(x)} \sin\left[\beta f(x) + \gamma\right], \tag{1.32}$$

де A та γ задаються формулою (1.27).

З аналізу рівнянь (1.5), (1.12), (1.19) важко знайти закономірність, яка б вказувала на те, за який законом змінюються коефіцієнти рівняння з ростом його порядку. У зв'язку з цим перейдемо до системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

§2. Інтегровані системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку із змінними коефіцієнтами

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dy(x)}{dx} = A(x) \cdot y(x), \tag{2.1}$$

де $y(x) = colon(y_1(x); y_2(x); \ldots; y_n(x))$, $A(x)$ - квадратна матриця n-го порядку, елементами якої є неперервні функції $a_{ij}(x)$. Відомо [2], що така система задовольняє теоремі існування і єдиності розв'язку. Припустимо, що елементи $a_{ij}(x)$ матриці $A(x)$ є неперервно диференційовні до $(n-1)$-го порядку включно. Визначимо вигляд матриці $A(x)$, при якому за допомогою заміни незалежної змінної (1.3) система (2.1) може бути приведена до системи з постійними коефіцієнтами.

Використавши (1.3) будемо мати

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy\left(f^{-1}(z)\right)}{dz} \cdot f'(x)$$

$$\frac{dy(x)}{dz} = \frac{A(x)}{f'(x)} y(x). \tag{2.2}$$

Покладемо в (2.2)

$$\frac{A(x)}{f'(x)} = C, \tag{2.3}$$

де C - постійна квадратна матриця n-го порядку. З (2.3) випливає, що за допомогою заміни (1.3) систему (2.1) можна привести до системи з постійними коефіцієнтами, якщо матриця $A(x)$ є добутком довільної постійної квадратної матриці C, n-го порядку, на довільну функцію $\varphi(x)$, яка ніде не перетворюється в нуль. В даному випадку $\varphi(x) = f'(x)$ і

$$A(x) = C \cdot f'(x). \tag{2.3'}$$

Позначивши $y(x) = y\left(f^{-1}(z)\right) = \tilde{y}(z)$, де $f^{-1}(z)$ обернена функція до функції (1.3), та врахувавши (2.3'), система (2.1) прийме вигляд

$$\frac{d\tilde{y}(z)}{dz} = C\tilde{y}(z), \tag{2.4}$$

розв'язок якої є загальновідомим і має вигляд $\tilde{y}(z) = e^{Cz} \cdot \tilde{y}_0$, де e^{Cz} - матрична експонента, $\tilde{y}_0$ - постійний вектор стовпець.

Тоді розв'язок системи (2.1) запишеться у вигляді

$$y(t) = e^{Cf(t)} y_0. \tag{2.5}$$

Обчислення матричної експоненти $e^{Cf(t)}$ можна реалізувати, наприклад, за наступним алгоритмом.

I) Обчислюється матрична експонента e^{Cz} за допомогою перетворення Лапласа [3].

Застосувавши до системи (2.4) з початковою умовою $\tilde{y}(0)=y_0$ перетворення Лапласа, отримаємо

$$[pE-C]\tilde{y}(p)=y_0,$$

звідси

$$\tilde{y}(p)=[pE-C]^{-1}y_0,$$

де $\tilde{y}(p)$ - зображення Лапласа вектор-функції $\tilde{y}(z)$.

Застосувавши обернене перетворення Лапласа, будемо мати

$$\tilde{y}(z)=L^{-1}[\tilde{y}(p)]=L^{-1}\{[pE-C]^{-1}y_0\}=e^{Az}y_0. \qquad (2.6)$$

ІІ) Підставивши в (2.6) заміну (1.3), знайдемо

$$y(t)=e^{Cf(t)}y_0.$$

Викликає цікавість встановлення відповідності між коефіцієнтами $C_0, C_1, \ldots, C_n$ диференціального рівняння (1.2) та елементами C_{ij} матриці C системи (2.4).

§3. Зв'язок між коефіцієнтами звідного диференціального рівняння та елементами матриці відповідної йому системи

Проаналізуємо до яких диференціальних рівнянь зводяться системи (2.1) з матрицею $A(x)$, заданою формулою (2.3). Для цього приведемо систему (2.1) до диференціального рівняння n-го порядку. Алгоритм такого приведення буде полягати в наступному:

І) Зводимо систему (2.4) до диференціального рівняння n-го порядку наприклад так, як це запропоновано в [4].

ІІ) В отриманому диференціальному рівнянні похідні $\frac{d^n\tilde{y}(z)}{dz^n}$ виражаємо через похідні $\frac{d^n y(x)}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy(x)}{dx}$.

ІІІ) Після зведення подібних членів при однакових похідних $\frac{d^i y(x)}{dx^i}$, $\forall i=\overline{1,n}$, отримаємо відповідні диференціальні рівняння (1.1), які є звідними за допомогою заміни (1.3).

Наведемо диференціальні рівняння до яких зводиться система (2.1) при $n=2;3;4$.

У випадку $n=2$, користуючись алгоритмом, приведеним вище, отримаємо

$$\frac{1}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2}-\left\{\frac{SpC}{f'(x)}+\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}\frac{dy(x)}{dx}+\det C\cdot y(x)=0, \qquad (3.1)$$

де SpC слід (сума діагональних елементів) квадратної матриці C другого порядку; $\det C$ - визначник цієї ж матриці.

Порівнюючи (1.5) з (3.1) бачимо, що мають місце рівності

$$\begin{cases} SpC=-\dfrac{C_1}{C_0}, \\ \det C=\dfrac{C_2}{C_0}. \end{cases} \qquad (3.2)$$

У випадку $n=3$ відповідне рівняння буде мати вигляд

$$\frac{1}{[f'(x)]^3}\cdot\frac{d^3y(x)}{dx^3}-\left\{\frac{SpC}{[f'(x)]^2}+\frac{3f''(x)}{[f'(x)]^4}\right\}\frac{d^2y(x)}{dx^2}+$$

$$+\left\{SpC\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}+\frac{3(f''(x))^2-f'(x)\cdot f'''(x)}{[f'(x)]^5}+\frac{M_2}{f'(x)}\right\}\times\frac{dy(x)}{dx}-\det C\cdot y(x)=0, \qquad (3.3)$$

де SpC і $\det C$ відповідно слід і визначник матриці C третього порядку, а

$$M_2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{3} C\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

тобто

$$M_2 = C\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

У формулі (3.4) використано скорочені позначення для визначників [5], складених з елементів матриці C

$$C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} C_{i_1 j_1} & C_{i_1 j_2} & \cdots & C_{i_1 j_p} \\ C_{i_2 j_1} & C_{i_2 j_2} & \cdots & C_{i_2 j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{i_p j_1} & C_{i_p j_2} & \cdots & C_{i_p j_p} \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

Визначник (3.5) згідно [5] називається мінором p-го порядку матриці C, якщо $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le n$.

Порівнюючи формули (1.6) і (3.3) бачимо, що має місце система рівностей

$$\begin{cases} SpC = -\dfrac{C_1}{C_0}, \\ M_2 = \dfrac{C_2}{C_0}, \\ \det C = -\dfrac{C_3}{C_0}. \end{cases} \tag{3.6}$$

У випадку $n = 4$ отримаємо рівняння 4-го порядку

$$\frac{1}{\left[f'(x)\right]^4}\cdot\frac{d^4 y(x)}{dx^4} - \left\{\frac{SpC}{\left[f'(x)\right]^3} + \frac{6 f''(x)}{\left[f'(x)\right]^5}\right\}\frac{d^3 y(x)}{dx^3} +$$

$$+\left\{\frac{M_2}{\left[f'(x)\right]^2} + 3SpC\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^4} + \frac{15\left[f''(x)\right]^2 - 4 f'(x)\cdot f'''(x)}{\left[f'(x)\right]^6}\right\}\times$$

$$\times\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \left\{\frac{M_3}{f'(x)} + \frac{M_2 f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3} + SpC\frac{3\left[f''(x)\right]^2 - f'(x)\cdot f'''(x)}{\left[f'(x)\right]^5} +\right.$$

$$\left.+\frac{15\left[f''(x)\right]^3 + \left[f'(x)\right]^2\cdot f^{IV}(x) - 10 f'(x)\cdot f''(x)\cdot f'''(x)}{\left[f'(x)\right]^7}\right\}\times$$

$$\times\frac{dy(x)}{dx} + \det C\cdot y(x) = 0, \tag{3.7}$$

де SpC і $\det C$ відповідно слід і визначник матриці C четвертого порядку, а

$$M_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4} C\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

тобто

$$M_2 = C\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$M_3 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=3}^{4} C\begin{pmatrix} i & j & k \\ i & j & k \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

тобто

$$M_3 = C\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

де $C\begin{pmatrix}i & j\\ i & j\end{pmatrix}$ у формулі (3.8) та $C\begin{pmatrix}i & j & k\\ i & j & k\end{pmatrix}$ у формулі (3.9) - мінори відповідно 2-го та 3-го порядків задані формулою (3.5).

Порівнюючи формули (1.7) та (3.7) будемо мати

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{C_0} = -SpC \\ \dfrac{C_2}{C_0} = M_2 \\ \dfrac{C_3}{C_0} = -M_3 \\ \dfrac{C_4}{C_0} = \det C. \end{cases} \qquad (3.10)$$

§4. Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{1}{\sin x + 1{,}1}\cdot\frac{d^4 y(x)}{dx^4} - \left\{\frac{0{,}4}{(\sin x+1{,}1)^3} - \frac{6\cos x}{(\sin x+1{,}1)^5}\right\}\frac{d^3 y(x)}{dx^3} -$$

$$-\left\{\frac{0{,}06}{(\sin x+1{,}1)^2} - \frac{0{,}12\cos x}{(\sin x+1{,}1)^4} + \frac{15\cos^2 x + 4(\sin x+1{,}1)\sin x}{(\sin x+1{,}1)^6}\right\}\frac{d^2 y(x)}{dx^2} -$$

$$-\left\{\frac{0{,}004}{\sin x+1{,}1} - \frac{0{,}06\cos x}{(\sin x+1{,}1)^3} + \frac{0{,}4\left[3\cos^2 x + (\sin x+1{,}1)\sin x\right]}{(\sin x+1{,}1)^5} -\right.$$

$$\left.-\frac{15\cos^3 x - (\sin x+1{,}1)^2\cos x + 10(\sin x+1{,}1)\sin x\cdot\cos x}{(\sin x+1{,}1)^7}\right\}\frac{dy(x)}{dx} - 0{,}0001 y(x) = 0. \qquad (4.1)$$

За допомогою заміни $z = \cos x - 1{,}1x$ диференціальне рівняння (4.1) зводиться до вигляду

$$\frac{d^4\tilde{y}(z)}{dz^4} - 0{,}4\frac{d^3\tilde{y}(z)}{dz^3} + 0{,}06\frac{d^2\tilde{y}(z)}{dz^2} - 0{,}004\frac{d\tilde{y}(z)}{dz} + 0{,}0001\tilde{y}(z) = 0 \qquad (4.2)$$

з відповідним характеристичним рівнянням

$$r^4 - 0{,}4r^3 + 0{,}06r^2 - 0{,}004r + 0{,}0001 = 0,$$

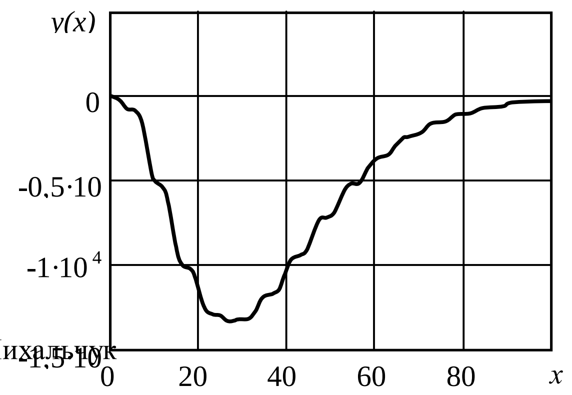
або $\quad (r-0{,}1)^4 = 0.$

Отже $\quad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0{,}1.$

Використавши (1.24) запишемо загальний розв'язок рівняння (4.1)

$$y(x) = \left\{K_1(\cos x - 1{,}1x)^3 + K_2(\cos x - 1{,}1x)^2 + K_3(\cos x - 11x) + K_4\right\}\times e^{0{,}1(\cos x - 1{,}1x)},$$

графік якого при $K_1 = 10;\ K_2 = 1;\quad K_3 = 3;\quad K_4 = 0$ зображено на рисунку.



1. Кислий О.О., Дутчак Б.І. З приводу розв'язування деяких лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку із змінними коефіцієнтами. // Десята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, 13-15 травня 2004 року, Київ, матеріали конференції, стор. 125.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – 6-е изд. – М. „Наука”, 1970.
3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М."Наука", 1976.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд. – М. „Наука”, 1988.