

УДК.539.3

О.В.Гуда.

Луцький національний технічний університет

## СУЧАСНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ПЛАСТИН

*В роботі розглянуто розвиток теорії згину пластин, аналізується побудова двомірних та тримірних моделей теорії пружності, висвітлено різні методи зведення тримірних задач до двомірних. Приділено увагу особливостям врахування поперечного зсуву та обтиснення в неklasичних теоріях у випадку контактної взаємодії.*

Ключові слова: гіпотези Г. Кірхгофа, оболонка, балка, пластина, поперечний зсув, пластини і оболонки типу Тимошенка, пружні деформації, напруження, анізотропна пластинка, моделі тримірної теорії пружності; задачі стійкості, рівноваги та коливань; ізотропна плита, двомірні задачі теорії пружності, напівобернений метод Сен-Венана, варіаційний принцип Кастильяно, варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, енергоасимптотичний метод, варіаційний принцип Рейсснера, ітераційний метод гіпотез, поперечний стиск, поперечний зсув, метод теорії R-функцій, асимптотичний метод інтегрування, контактні задачі, метод граничних інтегральних рівнянь, метод потенціалу, теорія лінійних та нелінійних сингулярних рівнянь, задачі змішаного типу, нормальні згинальні і дотичні напруження.

### 1. Сучасні моделі згину пластин та загальні підходи їх побудови

Основними елементами сучасної техніки та більшості конструкцій є оболонки, балки та пластини. Високий рівень розвитку сучасної техніки вимагає збереження надійності та міцності конструктивних систем, що призводить до розвитку нових теорій та методів розрахунку балок та плит.

Найбільш поширеною сьогодні теорією згину пластин є теорія, яка побудована на системі гіпотез Г. Кірхгофа [13]:

– прямолінійні волокна, перпендикулярні до серединної поверхні пластини до деформації, залишаються після деформації прямолінійними і перпендикулярними до зігнутої поверхні, зберігаючи при цьому свою довжину;

– відсутня взаємодія шарів пластини, паралельних серединній поверхні, в нормальному до шарів напрямі.

Проте неврахування цієї теорією деформацій поперечного зсуву та обтиснення, не дає можливості отримати навіть наближені результати. Тому в більшості випадків для розрахунку конструктивних систем використовують уточнені або неklasичні теорії пластин, що враховують деформації поперечного зсуву, а також є ряд моделей, що враховують і поперечне обтиснення.

Початок уточненої або неklasичної теорії поклав С.П. Тимошенко [29] при розв'язанні задачі коливання балки, врахувавши поперечні зсуви. У моделях пластин і оболонок типу Тимошенка приймаються наступні припущення:

– прямолінійні волокна, які до деформації були нормальними до серединної поверхні, зберігають після деформації свою довжину та прямолінійність, але не залишаються перпендикулярними до деформованої серединної поверхні, а повертаються на певний кут (гіпотеза прямих нормалей);

– нормальними напруженнями на площинках, паралельних до серединної поверхні, можна знехтувати у порівнянні з іншими напруженнями (плоский напружений стан).

Тимошенко детально розглянув згин прямої та початково зігнутої пластини по циліндричній поверхні, а також прогин круглої пластини при поперечному рівномірному тиску. Розробив теорію згину стрижнів і пластин з урахуванням деформацій зсуву, виконав цикл робіт по крученню, удару та коливанням стрижнів, розв'язав задачу концентрації напружень поблизу отворів (задача Тимошенка).

У книзі С.П.Тимошенко і Войнаровського-Кригера[28] основна увага надавалась розв'язанню конкретних задач пружних деформацій пластин і оболонок. Автори розрізняють тонкі пластинки, що піддаються малим, по відношенню до товщини пластинки, прогинам, та тонкі пластини, які піддаються великим прогинам. Щоб обчислити напруження в будь-якій точці пластинки першого типу, потрібно розв'язати диференційні рівняння в частинних похідних. Для таких пластинок різних геометричних форм розглянуто згин по циліндричній поверхні, чистий згин, симетричний згин, поперечні навантаження, різні умови обпирання по краю, а також

описується згин анізотропної пластинки. При вивченні пластинок другого типу враховується, що згин пластинки супроводжується деформацією серединної площини і напруженнями, що в ній виникають, якими неможливо знехтувати. Так виникають нелінійні рівняння і їхній розв'язок ускладнюється.

Застосування моделей тримірної теорії пружності та використання рівнянь, отриманих зведенням тримірних моделей теорії пружності до двомірних пов'язане з працями таких відомих учених, як С.О. Амбарцумян [1], В.В. Болотін, В.З. Власов [7], А.С. Вольмір [8], Б.Г. Гальоркін, Е.І. Григолюк, О.М. Гузь [18], М.О. Кільчевський, С.Г. Лехницький, А.І. Лур'є, Н.І. Мухелішвілі, Х.М. Муштарі, П. Нагді, А.П. Прусаков, Е. Рейснер, Б.П. Пелех та ін.

Основні рівняння тонких пологих оболонок та пластин типу Тимошенка детально розроблені в роботах С.О. Амбарцумяна та Б.П. Пелеха [1,22,23]. Б.Г. Гальоркін та Б.Ф. Власов отримали розв'язки для однорідної товстої плити, обертої по контуру. Згин плити симетричної структури розглядався Л.Е. Брюккером [4], а задачу коливань розв'язав В.Н. Москаленко [19]. Розв'язки задачі стійкості, рівноваги та коливань ізотропних плит знаходяться в роботах С.Сриниваза [30]. Н. Пейгано отримав розв'язки задач циліндричного згину для однорідної плити.

Теорії пружності анізотропних пластин присвячені роботи С.Г. Лехницького [16], де наведені розв'язки плоскої задачі для різних областей, розглянуто згини різними типами навантажень пластинок з обертими краями, пластинки, послабленої круговим отвором. Також вивченням анізотропних пластинок, що призводить до викривлення серединної поверхні, займалися Герінг, Губер. Випадок ізотропних пластинок розглядали в своїх працях Б.Г. Гальоркін, С.П. Тимошенко. М.М. Фрідманом були отримані розв'язки задач про згин різних ізотропних пластинок, зокрема для пластинок з отворами і з ізотропними включеннями з іншого матеріалу.

У працях Лур'є, присвячених згину довільно навантаженої круглій пластини, вперше було використане комплексне подання прогину, яке застосовувалося в багатьох наступних працях.

У даний час існує ряд методів зведення тримірної задачі теорії пружності до двомірної для оболонок та пластин. Одним із перших методів побудови уточнених теорій пружних плит є метод подання розв'язків рівнянь теорії пружності у вигляді нескінченних рядів за степенями нормальної до серединної поверхні координати. Започаткували цей метод Коші та Пуассон, пізніше його застосували Н.А. Кільчевський та Ф. Краус, для побудови рівнянь динаміки – І.Т. Селезов та Г.І. Петрашеня.

І.Н. Векуа запропонував метод зведення задач теорії пружності до двомірних задач для пружних плит, що полягає в розкладанні шуканих величин у ряди за поліномами Лежандра. Узагальнення даного методу для оболонок можна знайти в роботах Б.П. Пелеха та М.А. Сухорольського, а також у роботах В.В. Понятовського [25] та І.Ю. Хоми при дослідженні напружень в околі отворів у товстих плитах та плитах змінної товщини. При цьому Векуа та Гуляєв використали проєкційний спосіб одержання диференціальних рівнянь, Понятовський – напівобернений метод Сен-Венана з використанням варіаційного принципу Кастільяно, Хома – варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, Плеханов А.В. – енергоасимптотичний метод застосування варіаційного принципу Рейснера.

Наближені аналітичні методи розв'язання крайових задач поділяють на три типи: Треффца, Рітца та Рейснера, у яких шуканий розв'язок подається в вигляді обмежених сум базисних функцій, коефіцієнти при яких знаходять із деяких умов.

Ітераційний метод гіпотез С.О. Амбарцумяна на відміну від теорій Тимошенка, Рейснера та Нагді передбачає зміну по товщині пластини основних нормальних напружень, а також частково враховує поперечне обтіснення. Для пластин середньої товщини неklasичні теорії подібного типу побудовані С.Г. Лехницьким, Х.М. Муштарі, І.О. Прусомим, Е.І. Григолюком, І.Ю. Хомою та ін. Система рівнянь теорії Амбарцумяна [1] на відміну від класичної має більш високий порядок – шостий для пластини і десятий для пологої оболонки. Порядок рівнянь для пластин такий же, як у теорії пластин середньої товщин Рейснера.

Основною тенденцією розвитку сучасних методів розрахунку шарових конструкцій з композитних матеріалів, які мають занижений опір поперечному стисканню і поперечному зсуву, є врахування нелінійного розподілу компонент НСД за товщиною пакету шарів. У роботах О.П. Прусакова наведена теорія розрахунку трансверсально ізотропних шарових пластин несиметричної будови, яка базується на розкладанні компонент НСД у ряди за поперечною координатою і використанні змішаного варіаційного принципу Рейснера. Дана теорія враховує деформації поперечного зсуву, стискання і нелінійність зміни НСД за товщиною пакету шарів.

Асимптотичний метод інтегрування тримірної задачі був використаний О.К. Аскетяном, І.І. Ворочичем, А.Л. Гольденвейзером, О.П. Прусаковим [9,10,26,27] та ін. Прусаков О.П. запропонував метод взаємозв'язних рівнянь при згинальному деформуванні пластини з урахуванням перших двох наближень для компонент переміщень. А.С. Космодаміанським були отримані розв'язки задач напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропних плит довільної товщини при симетричному та косиметричному навантаженні.

Новий напрямок розрахунків у механіці деформівного твердого тіла утворюють методи теорії R-функцій. Даний метод був запропонований академіком НАН України Л.В. Рвачовим та його учнями.

Подальший розвиток моделей оболонок та пластин, побудованих методом гіпотез, здійснили В.Г. Піскунов, О.В. Марчук, Б.В. Гриневіцький, О.О. Рассказов, В.І. Шваб'юк [3,23] Рассказовим побудована теорія шаруватих ортропних оболонок на основі статичної гіпотези для поперечних дотичних і нормальних напружень та застосована для задач коливання і стійкості. Піскуновим розроблена динамічна теорія для шаруватих трансверсально-ізотропних оболонок та пластин. Огляд класичної та некласичної теорії розрахунку пластин і оболонок також здійснено В.В. Васильєвим [5], В.Г. Піскуновим [24].

## *2. Застосування некласичних моделей пластин, що враховують поперечний зсув та обтиснення до розв'язування контактних задач*

Довговічність сучасних машин та механізмів нерозривно пов'язане з складним розрахунком на міцність. Явище контактної взаємодії елементів конструкцій завжди було невід'ємною ознакою експлуатації техніки в багатьох галузях промисловості та будівництва. Високі вимоги, що висуваються до надійності конструкцій в даний час, можуть бути виконані лише при умові забезпечення достовірної інформації про її напружено-деформований стан. Як правило, області контакту характеризуються високим рівнем концентрації напружень, що часто призводить до зношуваності конструкцій та їх повного руйнування. Тому розрахункові схеми при цьому повинні максимально наближатися до реальних об'єктів, враховуючи складність їх форм, структури, характер навантаження, взаємодію з оточуючим середовищем та ін.

Передача зусиль у машинобудівних конструкціях переважно здійснюється шляхом контакту окремих деталей. Часто при розгляді вузлів, які є системою тіл взаємодії, явищами в локальній контактній зоні нехтують. Керуючись принципом Сен-Венана, у цьому випадку, здійснюють спрощення та схематизацію зусиль окремих деталей і отримують змішану задачу теорії пружності з заданими на межі силами та переміщеннями. Проте такі спрощення розрахункової схеми застосовні не завжди. Закон розподілу істинних контактних зусиль у більшості реальних конструкцій здійснює суттєвий вплив на напружено-деформований стан взаємодіючої пари, а інколи визначає працездатність конструкції в цілому. Тому в таких випадках виникає необхідність розв'язку контактних задач, де розміри та конфігурація площинки контакту, умови взаємодії на них нелінійно залежать від прикладених навантажень. Ці параметри є шуканими і можуть бути визначені в ході розв'язання задачі.

Існують різні класи задач, які входять у теорію контактної взаємодії: статичні, квазістатичні, динамічні. Різні проблеми контакту розглянуто у літературі.

Перші контактні задачі пружних тіл були розв'язані в кінці XIX на початку XX століття в роботах Г. Герца, Ж. Бусинеска, С.А. Чаплигіна, О.М. Динника та ін. Історично першими роботами вважають дослідження Герца, де вперше було отримано розподіл місцевих напружень у районі контакту пружних тіл. І хоча в постановці задачі були зроблені такі припущення, як мала область контакту, відсутність тертя, однорідність, ізотропність та ідеальна пружність матеріалу, результати дослідження і сьогодні не втратили своєї теоретичної та практичної цінності.

Розвиток теорії контактних задач почався в другій половині XX століття. Значний внесок у розвиток аналітичних методів розв'язання контактних задач здійснили фундаментальні праці Н.І.Мухелішвілі, І.Н.Векуа, С.Г.Міхліна, Л.А.Галіна, К.Каттанео, Н.Губера, А.Сіньоріні [6,15,21,31,32]. Розроблені ними методи теорії функції комплексної змінної і теорії сингулярних інтегральних рівнянь виявились достатньо ефективними для розв'язання змішаних задач теорії пружності. Проте область розглядуваних прикладів при цьому обмежувалась в основному класичними змішаними задачами про заглиблення жорсткого штампу в нескінченну або напівнескінченну область, циліндричний згин пластин та стрижнів, осесиметричний контакт пластин.

В основному в останні чотири десятиліття ставилася та розв'язувалася контактна задача для тонкостінних елементів (стрижнів, пластин та оболонок) такими вченими: Ю.П.Артюхіним,

І.А.Біргером [2], М.В.Блохом, Е.І.Григолоюком [11], В.С.Гудрамовичем [12,20], Б.Я.Кантором, С.Н.Карасьовим, В.Н.Максименком, Б.Л.Пелехом, Г.Я.Поповим, В.С.Саркісяном, М.А.Сухорольським, С.П.Тимошенком, В.М.Толкачовим, В.Ф.Чижовим та ін. Однак лишається не розроблене питання про розв'язок контактних задач для тіл різної форми, що пояснюється неможливістю отримати для таких тіл в аналітичному вигляді функцію Гріна, яка визначає ядра інтегральних рівнянь, на основі яких побудовано інтегральний підхід розв'язання контактних задач. Виникають труднощі при практичному розрахунку складних конструкцій. Подолання даної проблеми пов'язане з ідеєю розбиття вихідної задачі на ряд простіших. Першопочатковий традиційний метод полягав в ідеалізації зв'язків між елементами: послідовний розрахунок елементів без врахування їх взаємного впливу. В даний час розв'язання можна здійснювати за двома напрямками: метод суперелементів та ітераційний метод розв'язання контактних задач.

Для розв'язання задач механіки ефективно застосовуються методи граничних інтегральних рівнянь або методи потенціалу, що базуються на перетворенні вихідної системи диференціальних рівнянь в систему граничних інтегральних рівнянь. Значний внесок у розвиток даного методу був зроблений С.Г. Міхліним, В.Д. Купрадзе, Н.І. Мухелішвілі, В.І. Смирновим та ін. В.Д. Купрадзе розглядав наближені методи розв'язання статистичних задач для однорідних тіл і динамічних задач для кусково-однорідних тіл, сформулював зв'язок між переміщеннями і напруженнями на межі середовища.

У монографіях С.Г. Міхліна, Н.П. Векуа, В.Д. Купрадзе, П.І. Перліна та ін. розроблена теорія лінійних та деяких класів нелінійних сингулярних рівнянь. Наближені методи обчислення сингулярних інтегралів розроблені в працях В.В. Іванова, А.А. Корнійчука, І.К. Ліфанова. Розв'язок граничних задач методом розкладу по фундаментальних функціях, що призводить до інтегральних рівнянь першого роду розглянуто в роботах В.Д. Купрадзе [14], Т.Г. Гегелія та ін.

Для розв'язання задач змішаного типу в працях І.І. Воровича, В.М. Александрова, В.А. Бабешко [9,17] був використаний асимптотичний метод та його модифікації. Разом з асимптотичним методом є ряд методів зведення змішаної крайової задачі до нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. В.М. Александров, Г.Я. Попов, Л.В. Рвачев використали метод ортогональних поліномів. Група методів, що засновані на зведенні змішаної крайової задачі до деяких парних або потрійних інтегральних рівнянь або рядів, які перетворюються в інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, подана в працях Ю.Н. Кузьміна, А.А. Баблюяна та ін. Разом із класичною постановкою контактної задачі існує і варіаційна, вперше запропонована А. Сіньюоріні.

Задача про стиснений згин тонкого початково прямого стрижня навколо кругової опори чи випрямлення зігнутого стрижня на плоскій плиті прикладеними до кінців стрижня силами була вперше розглянута С.П.Тимошенком. Розв'язок побудовано на основі класичної теорії згину балок Бернуллі-Ейлера. Було виявлено стрибок у поперечній силі на кінці зони контакту або зосереджена сила в складі реакції. Після С.П.Тимошенка задачу стисненого згину стрижня навколо кругової опори розглянув М.М.Філоненко-Бородич на основі теорії згину балок, що враховує деформації поперечного зсуву без врахування поперечного обтиснення. У розв'язку було усунуто стрибок у поперечній силі і, відповідно, зникла зосереджена сила в реакції. Згин пластин на пружній основі за допомогою штампів досліджено В.М.Александровим, Б.Л.Пелехом та Р.Д.Сисаком. Враховано ефект поперечного обтиснення у рамках прикладної теорії пластин в роботах Ю.П.Артюхіна, М.В.Блоха, С.Н.Карасьова, Е.І.Григолоюка, В.М.Толкачова [11]. Поперечне обтиснення в даних роботах враховувалося шляхом інтегрування по товщині пластини співвідношення закону Гука для поперечної деформації. С.О.Саркісян розв'язував контактну задачу про циліндричний згин пластини з використанням теорії С.А.Амбарцумяна і теорії П.Нагді, де враховується як поперечний зсув так і обтиснення.

Е.І.Григолоюк, В.М.Толкачов, С.Н.Карасьов, Ю.П.Артюхін, С.О.Саркісян вивчали задачу циліндричного згину пластин штампами на основі рівнянь плоскої теорії пружності. Ю.П.Артюхін, використовуючи теорію Кірхгофа, дослідив контакт двох круглих пластин із зазором при навантаженні однієї з них. Розглянуто задачу циліндричного згину нескінченної пластини періодичною системою жорстких штампів з круговою формою основи, розв'язок будуватиметься в тригонометричних рядах і зведений до парних рівнянь, які розв'язуються чисельно. Ця задача також описана В.М.Толкачовим і розв'язок, побудований за допомогою функції Гріна, зведено до інтегрального рівняння з періодичним логарифмічним ядром, а далі до рівняння Фредгольма другого роду, що розв'язувалося чисельно.

Першим розглянув осесиметричну контактну задачу для круглої пластини К.Гіркман. У ній з позиції теорії пластин С.Жермен-Лагранжа-Кірхгофа припускалося, що початково не зігнута

пластина лежить на абсолютно жорсткій плоскій основі і притискається до основи рівномірно розподіленим навантаженням (вага пластини, або тиск). Під дією прикладених до зовнішнього контуру пластини рівномірно розподілених по колу згинальних моментів деяка кільцева зона пластини біля контуру може відірватись від основи. У роботі знайдено залежність між величиною зони відриву і моментом, а також напруження в пластині. В цій же роботі обговорюється аналогічна задача для балки та круглої пластини на вінклеровій основі. Задача Гіркмана розглядалась Р.Хофманом також на основі теорії С.Жермен-Лагранжа-Кірхгофа. Він розглянув пластину, яка початково опирається на кругову жорстку стінку неглибокої циліндричної порожнини з плоским дном. Під дією тиску або власної ваги пластина прогинається і деякою центральною зоною може ввійти в контакт з дном порожнини. Тут на відміну від задачі Гіркмана на контурі пластини діють лише поперечні сили і відсутній згинальний момент.

Контактна задача згину кругової пластини жорстким штампом з параболічною основою на основі теорії пластин з урахуванням поперечного зсуву без урахування поперечного обтіснення досліджена Л.А.Розенбергом.

Ряд досліджень по контактних задачах круглих пластин здійснив Ф.Ессенбург на основі теорії пластин, що враховує поперечний зсув без урахування поперечного обтіснення. У його працях розглянуто жорстко защемлена по контуру пластина, що згинається жорстким штампом з параболічною формою основи. Наведено графіки вимірювання величини зони контакту в залежності від навантаження на штамп, від величини зміщення штапу, графіки розподілу напружень. Все це порівнюється з результатами, що випливають з теорії С.Жермен-Лагранжа-Кірхгофа. Також розглянуто задачу Р.Хофмана (обпирання на дно порожнини), розв'язок якої будується по теорії типу С.П.Тимошенко з деякими змінами – враховуються нормальні поперечні напруження у записі співвідношень узагальненого закону Гука для згинальних моментів. Прогин не змінюється по товщині пластини і, таким чином, обтіснення нехтується. Показано, що врахування поперечного зсуву призводить до значної зміни нормальних згинальних і дотичних напружень у пластині в порівнянні отриманих по теорії С.Жермен-Лагранжа-Кірхгофа. Що ж стосується врахування нормальних напружень у формулах для моментів, то це врахування практично не змінює картину розподілу напружень та характер реакції. Також досліджено контакт двох пластин, які можуть до деформації або прилягати одна до одної, або знаходитись на віддалі. Спільний згин двох пластин з позицій теорії типу С.П.Тимошенко проаналізовано також Ю.П.Артюхіним та С.Н.Карасьовим.

Пластини на пружній основі, що стискаються штампами, розглянуті в роботах В.М.Александрова, Б.Лайнга, Б.Л.Пелеха, Р.Д.Сисака, І.Снеддона та ін.

Найбільші труднощі при розв'язанні контактних задач виникають при відшуванні границь області контакту. Одномірні контактні задачі для тонкостінних елементів з невідомою границею взаємодії мають розв'язки. Тому особливий інтерес викликають задачі відшування двовимірних областей контакту.

#### Література:

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Биргер И.А. Контактные задачи теории сержней, пластинок и оболочек // Труды IX Всес. конф. по теории оболочек. – Л.: Судостроение, 1975. – С.23-25.
3. Бондарь А.Г., Расказов А.О. Исследование изгиба многослойных пластин на основе уточненной теории // Прикл. механика. –1982. – №12. – С. 69-72.
4. Брюккер Л.Э. Некоторые варианты упрощения уравнения изгиба трехслойных пластин // Расчеты элементов авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 1965. – Вып. 3. – С.74-99.
5. Васильев В.В. Классическая теория пластин – теория и современный анализ // Изв. РАН, МТТ, 1998. –№3.– С.46-58.
6. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1985. – 285 с.
7. Власов В.З. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – Т.1.– 528 с.
8. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.
9. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
10. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. РАН, МТТ, 1997. – №3. – С. 134-149.

11. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
12. Гудрамович В.С., Моссаковский В.И. Контактная задача для упругого кольца, подкрепляющего цилиндрическую оболочку. – Изв. АН СССР. 1961, №2.- С. 153-156.
13. Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 402 с.
14. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. – 472с.
15. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512с.
16. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
17. Механика контактных взаимодействий // Сборник статей под ред. И.И. Воровича и А.В.Александрова. М.: Физматлит, 2001. – 672 с.
18. Механика композитных материалов и элементов конструкций.: В 3-х томах. / Под общей ред. Гузя А.Н. – К.: Наукова думка, 1982. – Т.1. – 368 с.
19. Москаленко В.Н. О собственных колебаниях трехслойных плит // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. Механика и машиностроение, 1962. – №4. – С.145-149.
20. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М. Контактные задачи теории оболочек и стержней. – М.: Машиностроение, 1978. – 248 с.
21. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
22. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.– Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
23. Пелех Б.Л., Швабюк В.И. Об одном обобщении теории упругих трансверсально-изотропных плит применительно к некоторым контактными задачам. – Сопротивление материалов и теория сооружений: Респ. межвед. научно-техн. сб., 1975. – Вып.26. – С.40-48
24. Пискунов В.Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г.Пискунов, А.О.Расказов // Прикл. механика. –2002. – Т.38, №2. – С. 22-57.
25. Понятовский В.В. Уравнения теории анизотропных пластинок // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: ЛГУ, 1965. – №4. – С. 3-28.
26. Прусаков А.П. О построении теории изгиба пластин средней толщины энергоасимптотическим методом // Прикл. механика, 1975. – вып.10. – С.44-51.
27. Прусаков А.П. Об анализе теорий изгиба трансверсально-изотропных пластин // Прикл. механика, 1966. – Т.32, №7. – С.69-75.
28. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1966. – 636с.
29. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
30. Srinivas S., Rao A.K., Joga Rao C.V. Flexure of Simple Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates // Zeitschrift Andewandthe Mathematik and Mechanik. – 1969. – Vol.49. – P. 449-458.
31. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica // Atti Soc. Ital. Progr. Sci. 1933. P. 513-533.
32. Signorini A. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // Rend. Mat. e Appl. 1960. V. 18. № 1-2. P. 95-139.