

УДК 004.421:519.213

П. А. Пех

Луцький національний технічний університет

АЛГОРИТМИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВАЛОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ОПЕРАЦІЙ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ РОЗПОДІЛОМ ЕРЛАНГА

Запропоновані алгоритми імітаційного моделювання стохастичних операцій з розподілом Ерланга відповідно з цілим Γ_k , дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності k .

Ключові слова: датчик випадкових чисел, імітаційне моделювання, розподіл Ерланга

Постановка проблеми. Імітаційне моделювання тривалості стохастичних операцій ґрунтується на використанні датчиків випадкових чисел [1, 2, 7, 8]. Широкого розповсюдження набули датчики випадкових чисел Γ_k з розподілом Ерланга k -го порядку. Порядок розподілу k можна розглядати як параметр стабільності операції: при $k=1$ через інтегрований вплив випадкових факторів операція є найменш стабільною, а зі збільшенням значення k цей вплив стає щоразу меншим, і при $k \rightarrow \infty$ операція стає детермінованою. У більшості відомих датчиків ерлангівських випадкових чисел параметр k вважається цілим числом. У даній роботі обґрунтовуються алгоритми імітаційного моделювання стохастичних операцій з цілим Γ_k , дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності k .

Аналіз останніх досліджень. Розробці датчиків випадкових чисел, у тому числі з розподілом Ерланга, присвячено багато праць [5, 6, 7], однак датчики з дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності операції k досліджені недостатньо.

Мета дослідження - розробити алгоритми імітаційного моделювання стохастичних операцій з розподілом Ерланга відповідно з цілим Γ_k , дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності операції k .

Результати дослідження. Більшість відомих датчиків випадкових чисел [5, 6] за базовий використовують датчик рівномірно розподілених випадкових чисел α_i , які належать інтервалу $[0;1]$. Для генерування таких чисел найбільше поширення отримав метод відрахувань. Згідно з цим методом, визначається деяка послідовність цілих чисел $\{m_i\}$, у якій початкове значення m_0 приймається рівним одиниці, а всі наступні числа m_1, m_2, \dots обчислюються за рекурентною формулою

$$m_{i+1} = G \cdot m_i \pmod{2^N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, K \quad (1)$$

де G – достатньо велике ціле число, яке суттєво впливає на якість отримуваних випадкових чисел; N – число, обумовлене розрядністю комп'ютера, на якому виконується моделювання. Зокрема, можна покласти $N=32$, $G=5^{17}$. Іншими словами, число m_{i+1} , яке називається в теорії чисел відрахунком за модулем 2^N , дорівнює залишку від ділення добутку $G \cdot m_i$ на число 2^N . Самі ж рівномірно розподілені псевдовипадкові числа обчислюються за формулою

$$\alpha_i = 2^{-N} \cdot m_i, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (2)$$

Послідовність чисел α_i періодична. Величина періоду, тобто кількість незалежних випадкових чисел α_i , які можуть бути отримані за допомогою моделюючого алгоритму (1)-(2), залежить від чисел G та N , і в кінцевому випадку обумовлюється ефективністю алгоритму та розрядністю комп'ютера.

Датчики α -чисел звичайно входять в бібліотеку стандартних програм будь-якого сучасного комп'ютера. Зокрема, мовою VBA він реалізується оператором *RANDOMIZE*. Він дозволяє генерувати послідовність незалежних рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел з періодом, цілком достатнім для практичних цілей.

Враховуючи основоположне значення α – датчиків, нами був виконаний статистичний аналіз генерованих α -чисел. Для цього отримані на комп'ютері випадкові числа групувались у вибірки великого об'єму (по 1000 чисел в кожній). Далі було проведено статистичний аналіз цих вибірок. В результаті такого аналізу ми прийшли до висновку, що розподіл α -чисел дещо

відрізняється від рівномірного. І хоча ці відмінності не суттєві і мають тенденцію до зменшення при збільшенні кількості реалізацій, однак вони можуть вплинути на якість тих датчиків, вихідним для яких являється α -датчик. Цього можна уникнути, збільшуючи кількість реалізацій, що, однак, збільшує час моделювання, або за рахунок спеціальних методів, розглянутих нижче.

Датчик ерлангівських Γ_k -чисел. Тривалість стохастичних операцій у багатьох випадках описується розподілом Ерланга. Зауважимо, що вихідними даними при розробленні датчиків випадкових ерлангівських чисел є середнє значення тривалості операції t і параметр стабільності k . Можна, однак, прийняти $t=1$ і розглядувати нормовану випадкову величину, яка характеризується лише одним параметром k .

З теорії ймовірностей добре відомий гамма-розподіл, який тісно пов'язаний з розподілом Ерланга [3, 4]. Тому випадкову ерлангівську величину можна розглядати як різновидність випадкової гамма-величини. Нехай $\Gamma_\nu \in (0; \infty)$ – випадкова гамма-величина зі щільністю

$$p_{\Gamma_\nu}(x) = \frac{x^{\nu-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(\nu)}, \quad (3)$$

де $\nu > 0$ – параметр розподілу; $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} \cdot e^{-x} dx$ – гамма функція.

Залежно від величини параметра ν можливі такі випадки:

$$1. \nu = k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (4)$$

$$2. \nu = n/N, \quad n, N = 1, 2, \dots (n < N); \quad (5)$$

$$3. \nu = k + n/N, \quad k, n, N = 1, 2, \dots (n < N). \quad (6)$$

Відповідні випадкові числа позначимо $\Gamma_k, \Gamma_{n/N}, \Gamma_{k+n/N}$. Як виявилось, способи їх генерування на комп'ютері істотно відрізняються. Зауважимо, що при $\nu \geq 1$ гамма-розподіл і розподіл Ерланга співпадають.

Якщо Γ_ν та Γ_μ – незалежні в імовірнісному сенсі випадкові величини, то легко довести, що випадкова величина $\Gamma_{\nu+\mu}$ також має гамма-розподіл, тобто

$$\Gamma_\nu + \Gamma_\mu = \Gamma_{\nu+\mu}. \quad (7)$$

Для цього знайдемо диференціальну функцію розподілу суми випадкових величин Γ_ν та Γ_μ :

$$\begin{aligned} p_{\Gamma_\nu + \Gamma_\mu}(x) &= \frac{d}{d(x)} \iint_{u+v < x} p_{\Gamma_\nu}(u) p_{\Gamma_\mu}(v) du dv = \frac{1}{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\mu)} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x du \int_0^{x-u} u^{\nu-1} e^{-u} v^{\mu-1} e^{-v} dv = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\mu)} \cdot \int_0^x u^{\nu-1} e^{-u} (x-u)^{\mu-1} e^{-(x-u)} du = \frac{1}{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\mu)} \cdot \int_0^1 t^{\nu-1} (1-t)^{\mu-1} dt = \frac{x^{\nu+\mu-1}}{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\mu)} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu + \mu)} = \frac{x^{\nu+\mu-1}}{\Gamma(\nu + \mu)} = p_{\Gamma_{\nu+\mu}}(x). \end{aligned}$$

З доведеного випливають два наслідки.

1. В результаті суперпозиції випадкових величин Γ_k та $\Gamma_{n/N}$ одержуємо також випадкову величину $\Gamma_{k+n/N}$:

$$\tilde{A}_k + \tilde{A}_{n/N} = \tilde{A}_{k+n/N}. \quad (8)$$

2. В результаті суперпозиції k випадкових величин Γ_1 одержуємо випадкову величину Γ_k :

$$\sum_{i=1}^k (\tilde{A}_1)_i = \tilde{A}_k. \quad (9)$$

Остання рівність дозволяє порівняно просто побудувати алгоритм генерування величини Γ_ν у випадку цілого значення параметра $\nu=k$.

Нехай $\alpha_i \in [0; 1]$ – незалежні рівномірно розподілені випадкові числа. Як відомо, випадкова величина $\xi_i = \ln(\alpha_i)$ має розподіл Γ_1 . Оскільки $-\ln(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k$, то із формули (9) випливає, що

$$\tilde{A}_k = -\ln(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k). \quad (10)$$

Цей алгоритм добре відомий [5, 6]. Якщо $\alpha_i \rightarrow 1$, то $\tilde{A}_1 \rightarrow 0$, і, навпаки, якщо $\alpha_i \rightarrow 0$, то $\tilde{A}_1 \rightarrow \infty$.

Якщо б α -датчик був ідеальним, то датчик (10) також ідеально точно генерував би ерлангівські випадкові числа. Однак існуючі способи генерування на комп'ютері випадкових α -чисел мають ряд недоліків. Зокрема, α -чисел, близьких до нуля та одиниці, у вибірках обмеженого об'єму часто виявляється більше, ніж очікується у відповідності з ймовірністю їх появи в рівномірному розподілі. Це неминуче викликає спотворення і Γ_k -датчика. Цього можна уникнути, якщо на величину Γ_k накласти обмеження

$$t_{\min} < \tilde{A}_k < t_{\max}. \quad (11)$$

Величини t_{\min} та t_{\max} залежно від величини параметра k , встановлені нами шляхом обчислювального експерименту, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Величина обмежуючих параметрів t_{\min} та t_{\max} датчика ерлангівських чисел Γ_k в залежності від величини параметра k стабільності виробничої операції.

Значення параметра стабільності k , що задається	Величина обмежуючих параметрів		Фактичне значення параметра стабільності k	
	t_{\min}	t_{\max}	датчик без обмежень	датчик з обмеженнями
1	0,01	5,00	0,95	1,01
2	0,13	3,50	1,77	1,99
3	0,24	2,51	2,22	2,98
4	0,31	2,11	2,96	3,95
5	0,37	1,91	3,14	5,02
6	0,40	1,82	3,43	5,99
7	0,44	1,73	3,68	7,00
8	0,47	1,67	4,02	7,97
9	0,50	1,64	4,69	9,00
10	0,52	1,62	5,33	9,96
11	0,54	1,60	5,64	11,04
12	0,56	1,57	5,97	12,00
13	0,58	1,55	6,45	12,97
14	0,59	1,53	7,87	14,04
15	0,60	1,50	8,12	15,00
17	0,62	1,47	8,98	16,96
20	0,65	1,45	9,64	19,87

Виникає питання, наскільки правомірно накладання таких обмежень. Строго кажучи, накладання обмежень на випадкову величину Γ_k спотворює датчик (10). Адже в цьому випадку через небажання використовувати надмірну кількість α -чисел, близьких до нуля або одиниці, ми їх ігноруємо зовсім. Але питання тут повинно стояти, як на наш погляд, інакше. Якщо датчик з обмеженнями забезпечує меншу міру спотворення, ніж датчик без обмежень, то накладання обмежень виправдане.

Накладання обмежень на датчик (10) є цілком прийнятним і з практичної точки зору. Адже цим самим стверджується факт, що тривалість реальних стохастичних операцій, тобто величина Γ_k , ніколи не буває близькою до нуля, так само, як і не прямує до нескінченності. А, головне, датчик з обмеженнями більш точно відтворює розподіл Ерланга з наперед заданими параметрами.

Датчик ерлангівських $\Gamma_{n/N}$ -чисел. Сам по собі цей датчик для дослідження операцій не представляє особливого інтересу, оскільки реальні стохастичні операції мають параметр стабільності $k \geq 1$. Але, згідно з виразом (8), він може використовуватись для розроблення випадкових ерлангівських чисел $\Gamma_{k+n/N}$ зі змішаним значенням параметра стабільності. З цієї

метою введемо в розгляд випадкову бета-величину $B_{\nu, \mu} \in (0; 1)$, яка має розподіл ймовірностей зі щільністю

$$p_{B_{\nu, \mu}}(x) = \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}}{B(\nu, \mu)} \quad (12)$$

де $\nu > 1, \mu > 1$ – параметри розподілу, $B(\nu, \mu) = \int_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1} dx$ – бета-функція.

Відомо, що бета і гамма-функції пов'язані між собою співвідношенням [3]:

$$B(\nu, \mu) = \frac{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu + \mu)}. \quad (13)$$

Доведемо, що якщо $\Gamma_{\nu+\mu}$ і $B_{\nu, \mu}$ – незалежні випадкові величини, то

$$\Gamma_{\nu+\mu} \cdot B_{\nu, \mu} = \Gamma_{\nu} \quad (14)$$

Доведення можна виконати методом моментів. Моментом k -го порядку випадкової величини ξ називають число $M\xi^k = \int_a^b x^k p_{\xi}(x) dx$, якщо $a < p_{\xi}(x) < b$.

Отже

$$M\Gamma_{\nu}^k = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \int_0^{\infty} x^{k+\nu-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)}; M\Gamma_{\nu+\mu}^k = \frac{1}{\Gamma(\nu+\mu)} \cdot \int_0^{\infty} x^{k+\nu+\mu-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\nu+\mu+k)}{\Gamma(\nu+\mu)};$$

$$M(\Gamma_{\nu+\mu} \cdot B_{\nu, \mu})^k = M(\Gamma_{\nu+\mu}^k \cdot B_{\nu, \mu}^k) = M\Gamma_{\nu+\mu}^k \cdot MB_{\nu, \mu}^k = M\Gamma_{\nu+\mu}^k \cdot \frac{1}{B(\nu, \mu)} \cdot B(\nu+k, \mu) =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+k) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+k)} = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)} = M\Gamma_{\nu}^k.$$

Наслідок. Якщо $\nu < 1, \mu = 1 - \nu, \Gamma_1$ і $B_{\nu, 1-\nu}$ – незалежні випадкові величини, то

$$\Gamma_{\nu} = \Gamma_1 \cdot B_{\nu, 1-\nu}. \quad (15)$$

Прийнявши $\nu = n/N$, маємо

$$\Gamma_{n/N} = \Gamma_1 \cdot B_{n/N, 1-n/N}. \quad (16)$$

Вираз (4.16) дозволяє обчислювати випадкові числа $\Gamma_{n/N}$ як добуток чисел Γ_1 , алгоритм генерування яких ми вже розглянули, і бета-чисел $B_{n/N, 1-n/N}$. Що стосується останніх, то оригінальний метод їх одержання запропонував Йонк [9].

Нехай $\alpha_i, \alpha_{i+1} \in (0; 1)$ – незалежні рівномірно розподілені випадкові числа, такі що $\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu} < 1$. Тоді, за твердженням Йонка, величина $\frac{\alpha_i^{1/\nu}}{\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu}}$ має бета-розподіл, тобто

$$p_{\alpha_i^{1/\nu} / (\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu})}(x) = \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}}{B(\nu, \mu)} \quad (17)$$

або

$$\frac{\alpha_i^{1/\nu}}{\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu}} = B_{\nu, \mu}. \quad (18)$$

Визначимо, скільки в середньому потрібно використати випадкових α -чисел для того, щоб отримати одне бета-число $B_{\nu, \mu}$. Легко показати, що

$$P(\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu} < 1) = \frac{\nu\mu}{\nu + \mu} \cdot B(\nu, \mu) \quad (19)$$

Таким чином, для отримання одного числа $B_{v,\mu}$ необхідно використати:

$$2\text{-і } \alpha \text{-величини з імовірністю } P_2 = \frac{v\mu}{v + \mu} \cdot B(v, \mu);$$

$$4\text{-и } \alpha \text{-величини з імовірністю } P_4 = (1 - P_2) \cdot P_2 ;$$

.....

$$2k \alpha \text{-величин з імовірністю } P_{2k} = (1 - P_2)^{k-1} \cdot P_2 ;$$

Отримали геометричний розподіл. Трудомісткість алгоритму, тобто середнє значення кількості α -чисел, які використовуються для генерування одного числа $B_{v,\mu}$, дорівнює:

$$S = \sum_{i=1}^k 2i \cdot (1 - P_2)^{i-1} \cdot P_2 = \frac{2(v + \mu)}{v\mu \cdot B(v, \mu)}. \quad (20)$$

Розраховані за формулою (20) значення трудомісткості алгоритму Йонка у разі $v > 1, \mu > 1$ показані в таблиці 4.2. Так, якщо $v = \mu = 4$, то $S=140$, тобто для отримання одного числа $B_{4,4}$ потрібно витратити в середньому 140 α -чисел. Тому, якщо $v > 1, \mu > 1$, то алгоритм Йонка стає практично непридатним.

Таблиця 4.2 – Трудомісткість алгоритму Йонка у випадку $v > 1, \mu > 1$.

Величина параметра v	Величина параметра μ				
	1	2	3	4	5
1	4	6	8	10	12
2	6	12	20	30	42
3	8	20	40	70	112
4	10	30	70	140	252
5	12	42	112	252	504

Зовсім по-іншому буде у випадку, коли $v < 1, \mu < 1$. Покладемо в (4.18) $v = n/N < 1, \mu = 1 - v = 1 - n/N < 1$. Отримаємо

$$\frac{\alpha_i^{N/n}}{\alpha_i^{N/n} + \alpha_{i+1}^{N/(N-n)}} = B_{n/N, 1-n/N}. \quad (21)$$

В цьому випадку трудомісткість алгоритму Йонка дорівнює:

$$S = \frac{2}{v(1-v)\Gamma(v)\Gamma(1-v)} = \frac{2}{1-v} \cdot \frac{\sin \pi v}{\pi v}. \quad (22)$$

Функція $S=S(v)$ досягає мінімуму у разі $v=1/2$, тому

$$S \leq \frac{8}{\pi} \approx 2.5. \quad (23)$$

Тобто майже кожна пара чисел (α_i, α_{i+1}) дозволяє отримати випадкове бета-число $B_{n/N, 1-n/N}$, що свідчить про високу ефективність алгоритму Йонка в цьому випадку. Таким чином, генерування випадкових чисел $\Gamma_{n/N}$ полягає в наступному:

1. Генерується псевдовипадкове рівномірно розподілене число α і за ним обчислюється гамма-число Γ_1 .

2. Генерується пара чисел (α_i, α_{i+1}) .

3. Перевіряється умова: $\alpha_i^{N/n} + \alpha_{i+1}^{N/(N-n)} < 1$. Якщо вона істинна, то обчислюється число

$$B_{n/N, 1-n/N} = \frac{\alpha_i^{N/n}}{\alpha_i^{N/n} + \alpha_{i+1}^{N/(N-n)}}. \text{ Якщо умова невірна, то повертаємося на пункт 2.}$$

4. Обчислюється шукане число $\Gamma_{n/N}$ згідно з виразом (16).

Датчик ерлангівських $\Gamma_{k+n/N}$ -чисел. Як уже було показано, випадкова величина $\Gamma_{k+n/N}$ може бути одержана шляхом суперпозиції випадкових величин Γ_k і $\Gamma_{n/N}$, алгоритми генерування яких розглянуті вище, а саме $\Gamma_{k+n/N} = \Gamma_k + \Gamma_{n/N}$. Крім того, зауважимо, що запропоновані в даній роботі датчики випадкових величин $\Gamma_{n/N}$ і $\Gamma_{k+n/N}$ разом з датчиком Γ_k -чисел можуть бути використані для одержання випадкових бета-чисел $V_{v,\mu}$ з параметрами v, μ . В цьому легко переконатись записавши формулу (14) у вигляді

$$V_{v,\mu} = \frac{\Gamma_v}{\Gamma_v + \Gamma_\mu}. \quad (24)$$

Висновки та рекомендації

1. Запропоновано датчик випадкових чисел Γ_k з розподілом Ерланга з цілим значенням параметра стабільності операції k шляхом накладання обмежень на величину отримуваних чисел.
2. Запропоновано датчик випадкових чисел з розподілом Ерланга з дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності операції k .
3. Визначена трудомісткість алгоритму Йонка.
4. Запропоновані датчики випадкових чисел з розподілом Ерланга рекомендуються до використання в алгоритмах імітаційного моделювання реальних стохастичних процесів.

1. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание: теория и приложения. -М.: Мир, 1965. - 302 с.
2. Саати Т.Д. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. - М.: Сов. радио, 1965. - 510 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов. радио, 1972. - 551 с.
5. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973. - 307 с.
6. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. -М.: Наука, 1985. - 78 с.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982. - 296 с.
8. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. - М.: Наука, 1968. - 288 с.
9. Hammersley J.M., Handscomd D.S. Monte-Carlo methods. - London, Methueu; New York, Wiley, 1964. - 127 p.