УДК 004.421:519.213
П. А. Пех
Луцький національний технічний університет

АЛГОРИТМИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВАЛОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ОПЕРАЦІЙ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ РОЗПОДІЛОМ ЕРЛАНГА

Запропоновані алгоритми імітаційного моделювання стохастичних операцій з розподілом Ерланга відповідно з цілим Γ_k, дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності k.

Ключові слова: *датчик випадкових чисел, імітаційне моделювання, розподіл Ерланга*

Постановка проблеми. Імітаційне моделювання тривалості стохастичних операцій ґрунтується на використанні датчиків випадкових чисел [1, 2, 7, 8]. Широкого розповсюдження набули датчики випадкових чисел Γ_k з розподілом Ерланга k–го порядку. Порядок розподілу k можна розглядати як параметр стабільності операції: при $k=1$ через інтегрований вплив випадкових факторів операція є найменш стабільною, а зі збільшенням значення k цей вплив стає щоразу меншим, і при $k \to \infty$ операція стає детермінованою. У більшості відомих датчиків ерлангівських випадкових чисел параметр k вважається цілим числом. У даній роботі обґрунтовуються алгоритми імітаційного моделювання стохастичних операцій з цілим Γ_k, дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності k.

Аналіз останніх досліджень. Розробці датчиків випадкових чисел, у тому числі з розподілом Ерланга, присвячено багато праць [5, 6, 7], однак датчики з дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності операції k досліджені недостатньо.

Мета дослідження - розробити алгоритми імітаційного моделювання стохастичних операцій з розподілом Ерланга відповідно з цілим Γ_k, дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності операції k.

Результати дослідження. Більшість відомих датчиків випадкових чисел [5, 6] за базовий використовують датчик рівномірно розподілених випадкових чисел α_i, які належать інтервалу $[0;1]$. Для генерування таких чисел найбільше поширення отримав метод відрахувань. Згідно з цим методом, визначається деяка послідовність цілих чисел $\{m_i\}$, у якій початкове значення m_0 приймається рівним одиниці, а всі наступні числа m_1, m_2,… обчислюються за рекурентною формулою

$$m_{i+1} = G \cdot m_i \left(\operatorname{mod} 2^N\right), \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

де G – достатньо велике ціле число, яке суттєво впливає на якість отримуваних випадкових чисел; N –число, обумовлене розрядністю комп'ютера, на якому виконується моделювання. Зокрема, можна покласти $N=32$, $G=5^{17}$. Іншими словами, число m_{i+1}, яке називається в теорії чисел відрахунком за модулем 2^N, дорівнює залишку від ділення добутку $G{\cdot}m_i$ на число 2^N. Самі ж рівномірно розподілені псевдовипадкові числа обчислюються за формулою

$$\alpha_i = 2^{-N} \cdot m_i, \quad i = 1,2,\ldots \tag{2}$$

Послідовність чисел α_i періодична. Величина періоду, тобто кількість незалежних випадкових чисел α_i, які можуть бути отримані за допомогою моделюючого алгоритму (1)-(2), залежить від чисел G та N, і в кінцевому випадку обумовлюється ефективністю алгоритму та розрядністю комп'ютера.

Датчики α-чисел звичайно входять в бібліотеку стандартних програм будь-якого сучасного комп'ютера. Зокрема, мовою *VBA* він реалізується оператором *RANDOMIZE.* Він дозволяє генерувати послідовність незалежних рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел з періодом, цілком достатнім для практичних цілей.

Враховуючи основоположне значення α – датчиків, нами був виконаний статистичний аналіз генерованих α - чисел. Для цього отримані на комп'ютері випадкові числа групувались у вибірки великого об'єму (по 1000 чисел в кожній). Далі було проведено статистичний аналіз цих вибірок. В результаті такого аналізу ми прийшли до висновку, що розподіл α - чисел дещо відрізняється від рівномірного. І хоча ці відмінності не суттєві і мають тенденцію до зменшення при збільшенні кількості реалізацій, однак вони можуть вплинути на якість тих датчиків, вихідним для яких являється α-датчик. Цього можна уникнути, збільшуючи кількість реалізацій, що, однак, збільшує час моделювання, або за рахунок спеціальних методів, розглядуваних нижче.

Датчик ерлангівських Γ_k-чисел. Тривалість стохастичних операцій у багатьох випадках описується розподілом Ерланга. Зауважимо, що вихідними даними при розробленні датчиків випадкових ерлангівських чисел є середнє значення тривалості операції *t* і параметр стабільності *k.* Можна, однак, прийняти *t=1* і розглядувати нормовану випадкову величину, яка характеризується лише одним параметром *k.*

З теорії ймовірностей добре відомий гамма-розподіл, який тісно пов'язаний з розподілом Ерланга [3, 4]. Тому випадкову ерлангівську величину можна розглядати як різновидність випадкової гамма-величини. Нехай $\Gamma_v \epsilon (0;\infty)$ – випадкова гамма-величина зі щільністю

$$p_{г_v}(x) = \frac{x^{v-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(v)}, \tag{3}$$

де $v > 0$ – параметр розподілу; $\Gamma(v) = \int_0^\infty x^{v-1} \cdot e^{-x} dx$ - гамма функція.

Залежно від величини параметра *v* можливі такі випадки:

$$1.\ v = k, \qquad k = 1,2,\ldots; \tag{4}$$

$$2.\ v = n/N, \qquad n, N = 1,2\ldots(n<N); \tag{5}$$

$$3.\ v = k + n/N, \quad k, n, N = 1,2,\ldots\ (n<N). \tag{6}$$

Відповідні випадкові числа позначимо $\Gamma_к$, $\Gamma_{n/N}$, $\Gamma_{к+n/N}$. Як виявилося, способи їх генерування на комп'ютері істотно відрізняються. Зауважимо, що при $v \geq 1$ гамма-розподіл і розподіл Ерланга співпадають.

Якщо Γ_v та Γ_μ – незалежні в імовірнісному смислі випадкові величини, то легко довести, що випадкова величина $\Gamma_{v+\mu}$ також має гамма-розподіл, тобто

$$\Gamma_v + \Gamma_\mu = \Gamma_{v+\mu}. \tag{7}$$

Для цього знайдемо диференціальну функцію розподілу суми випадкових величин Γ_v та Γ_μ:

$$p_{\Gamma_v+\Gamma_\mu}(x) = \frac{d}{d(x)} \iint\limits_{u+v<x} p_{\Gamma_v}(u) p_{\Gamma_\mu}(v) du dv = \frac{1}{\Gamma(v)\cdot\Gamma(\mu)} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x du \int_0^{x-4} u^{v-1} e^{-u} v^{\mu-1} e^{-v} dv =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)\cdot\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^x u^{v-1} e^{-u} (x-u)^{\mu-1} e^{u-x} du = \frac{1}{\Gamma(v)\cdot\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^1 t^{v-1} (1-t)^{\mu-1} dt = \frac{x^{v+\mu-1}}{\Gamma(v)\cdot\Gamma(\mu)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(v)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(v+\mu)} = \frac{x^{v+\mu-1}}{\Gamma(v+\mu)} = p_{\Gamma_{v+\mu}}(x).$$

З доведеного випливають два наслідки.

1.В результаті суперпозиції випадкових величин Γ_k та $\Gamma_{n/N}$ одержуємо також випадкову величину $\Gamma_{k+n/N}$:

$$\tilde{A}_k + \tilde{A}_{n/N} = \tilde{A}_{k+n/N}. \tag{8}$$

2.В результаті суперпозиції *k* випадкових величин Γ_1 одержуємо випадкову величину Γ_k:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{A}_1\right)_i = \tilde{A}_k. \tag{9}$$

Остання рівність дозволяє порівняно просто побудувати алгоритм генерування величини Γ_v у випадку цілого значення параметра *v=k.*

Нехай $\alpha_i \in [0;1]$ - незалежні рівномірно розподілені випадкові числа. Як відомо, випадкова величина $\xi_i = \ln(\alpha_i)$ має розподіл Γ_1. Оскільки $-\ln(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_i) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i$, то із формули (9) випливає, що

$$\tilde{A}_k = -\ln(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_k). \tag{10}$$

Цей алгоритм добре відомий [5, 6]. Якщо $\alpha_i \to 1$, то $\tilde{A}_1 \to 0$, і , навпаки, якщо $\alpha_i \to 0$, то $\tilde{A}_1 \to \infty$.

Якщо б α-датчик був ідеальним, то датчик (10) також ідеально точно генерував би ерлангівські випадкові числа. Однак існуючі способи генерування на комп'ютері випадкових α-чисел мають ряд недоліків. Зокрема, α-чисел, близьких до нуля та одиниці, у вибірках обмеженого об'єму часто виявляється більше, ніж очікується у відповідності з ймовірністю їх появи в рівномірному розподілі. Це неминуче викликає спотворення і Γ_k-датчика. Цього можна уникнути, якщо на величину Γ_k накласти обмеження

$$t_{\min} < \tilde{A}_k < t_{\max}. \qquad (11)$$

Величини $t_{\min}$ та $t_{\max}$ залежно від величини параметра *k*, встановлені нами шляхом обчислювального експерименту, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Величина обмежуючих параметрів $t_{\min}$ та $t_{\max}$ датчика ерлангівських чисел Γ_k в залежності від величини параметра *k* стабільності виробничої операції.

Значення параметра стабільності *k*, що задається	Величина обмежуючих параметрів		Фактичне значення параметра стабільності *k*	
	t_{min}	t_{max}	датчик без обмежень	датчик з обмеженнями
1	0,01	5,00	0,95	1,01
2	0,13	3,50	1,77	1,99
3	0,24	2,51	2,22	2,98
4	0,31	2,11	2,96	3,95
5	0,37	1,91	3,14	5,02
6	0,40	1,82	3,43	5,99
7	0,44	1,73	3,68	7,00
8	0,47	1,67	4,02	7,97
9	0,50	1,64	4,69	9,00
10	0,52	1,62	5,33	9,96
11	0,54	1,60	5,64	11,04
12	0,56	1,57	5,97	12,00
13	0,58	1,55	6,45	12,97
14	0,59	1,53	7,87	14,04
15	0,60	1,50	8,12	15,00
17	0,62	1,47	8,98	16,96
20	0,65	1,45	9,64	19,87

Виникає питання, наскільки правомірно накладання таких обмежень. Строго кажучи, накладання обмежень на випадкову величину Γ_k спотворює датчик (10). Адже в цьому випадку через небажання використовувати надмірну кількість α - чисел, близьких до нуля або одиниці, ми їх ігноруємо зовсім. Але питання тут повинно стояти, як на наш погляд, інакше. Якщо датчик з обмеженнями забезпечує меншу міру спотворення, ніж датчик без обмежень, то накладання обмежень виправдане.

Накладання обмежень на датчик (10) є цілком прийнятним і з практичної точки зору. Адже цим самим стверджується факт, що тривалість реальних стохастичних операцій, тобто величина Γ_k, ніколи не буває близькою до нуля, так само, як і не прямує до нескінченності. А, головне, датчик з обмеженнями більш точно відтворює розподіл Ерланга з наперед заданими параметрами.

Датчик ерлангівських $\mathbf{\Gamma_{n/N}}$-чисел. Сам по собі цей датчик для дослідження операцій не представляє особливого інтересу, оскільки реальні стохастичні операції мають параметр стабільності $k \geq 1$. Але, згідно з виразом (8), він може використовуватись для розроблення випадкових ерлангівських чисел $\Gamma_{k+n/N}$ зі змішаним значенням параметра стабільності. З цією метою введемо в розгляд випадкову бета-величину $B_{\nu,\mu} \in (0;1)$, яка має розподіл ймовірностей зі щільністю

$$p_{B_{\nu,\mu}}(x) = \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}}{B(\nu,\mu)} \tag{12}$$

де $\nu > 1, \mu > 1$ – параметри розподілу, $B(\nu,\mu) = \int_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}dx$ – бета-функція.

Відомо, що бета і гамма-функції пов'язані між собою співвідношенням [3]:

$$B(\nu,\mu) = \frac{\Gamma(\nu)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}. \tag{13}$$

Доведемо, що якщо $\Gamma_{\nu+\mu}$ і $B_{\nu,\mu}$ – незалежні випадкові величини, то

$$\Gamma_{\nu=\mu} \cdot B_{\nu,\mu} = \Gamma_\nu \tag{14}$$

Доведення можна виконати методом моментів. Моментом *k*-го порядку випадкової величини ξ називають число $M\xi^k = \int_a^b x^k p_\xi(x)dx$, якщо $a<p_\xi(x)<b$.

Отже

$$M\Gamma_\nu^k = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\cdot\int_0^\infty x^{k+\nu-1}\ e^{-x}dx = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)};\ M\Gamma_{\nu+\mu}^k = \frac{1}{\Gamma(\nu+\mu)}\cdot\int_0^\infty x^{k+\nu+\mu-1}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(\nu+\mu+k)}{\Gamma(\nu+\mu)};$$

$$M\left(\Gamma_{\nu+\mu}\cdot B_{\nu,\mu}\right)^k = M\left(\Gamma_{\nu+\mu}^k\cdot B_{\nu,\mu}^k\right) = M\Gamma_{\nu+\mu}^k\cdot MB_{\nu,\mu}^k = M\Gamma^k{}_{\nu+\mu}\cdot\frac{1}{B(\nu,\mu)}\cdot B(\nu+k,\mu) =$$

$$= \frac{\dfrac{\Gamma(\nu+k)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu+k)}}{\dfrac{\Gamma(\nu)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}} = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)} = M\Gamma_\nu^k.$$

Наслідок. Якщо ν<1, μ =1-ν , Γ_1 і $B_{\nu,1-\nu}$ – незалежні випадкові величини, то

$$\Gamma_\nu = \Gamma_1 \cdot B_{\nu,1-\nu.} \tag{15}$$

Прийнявши $\nu = n/N$, маємо

$$\Gamma_{n/N} = \Gamma_1 \cdot B_{n/N,1-n/N.} \tag{16}$$

Вираз (4.16) дозволяє обчислювати випадкові числа $\Gamma_{n/N}$ як добуток чисел Γ_1, алгоритм генерування яких ми вже розглянули, і бета-чисел $B_{n/N,1-n/N}$. Що стосується останніх, то оригінальний метод їх одержання запропонував Йонк [9].

Нехай $\alpha_{i,}\alpha_{i+1} \in (0;1)$ – незалежні рівномірно розподілені випадкові числа, такі що $\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu} < 1$. Тоді, за твердженням Йонка, величина $\dfrac{\alpha_i^{1/\nu}}{\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu}}$ має бета-розподіл, тобто

$$p_{\alpha_i^{1/\nu}/(\alpha_i^{1/\nu}+\alpha_{i+1}^{1/\mu})}(x) = \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}}{B(\nu,\mu)} \tag{17}$$

або

$$\frac{\alpha_i^{1/\nu}}{\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu}} = B_{\nu,\mu}. \tag{18}$$

Визначимо, скільки в середньому потрібно використати випадкових α - чисел для того, щоб отримати одне бета-число $B_{\nu,\mu}$. Легко показати, що

$$P\left(\alpha_i^{1/\nu} + \alpha_{i+1}^{1/\mu} < 1\right) = \frac{\nu\mu}{\nu+\mu}\cdot B(\nu,\mu) \tag{19}$$

Таким чином, для отримання одного числа $\mathrm{B}_{\nu,\mu}$ необхідно використати:

2-і α -величини з імовірністю $\mathrm{P}_2 = \frac{\nu\mu}{\nu+\mu}\cdot \mathrm{B}(\nu,\mu)$;

4-и α -величини з імовірністю $\mathrm{P}_4 = (1-\mathrm{P}_2)\cdot \mathrm{P}_2$;

……………………………………………………………………..

2k α -величин з імовірністю $\mathrm{P}_{2k} = (1-\mathrm{P}_2)^{k-1}\cdot \mathrm{P}_2$;

Отримали геометричний розподіл. Трудомісткість алгоритму, тобто середнє значення кількості α -чисел, які використовуються для генерування одного числа $\mathrm{B}_{\nu,\mu}$, дорівнює:

$$S=\sum_{i=1}^{k} 2i\cdot(1-\mathrm{P}_2)^{i-1}\cdot \mathrm{P}_2 = \frac{2(\nu+\mu)}{\nu\mu\cdot \mathrm{B}(\nu,\mu)}. \tag{20}$$

Розраховані за формулою (20) значення трудомісткості алгоритму Йонка у разі $\nu>1, \mu>1$ показані в таблиці 4.2. Так, якщо $\nu=\mu=4$, то *S=140*, тобто для отримання одного числа $\mathrm{B}_{4,4}$ потрібно витратити в середньому 140 α -чисел. Тому, якщо $\nu>1, \mu>1$, то алгоритм Йонка стає практично непридатним.

Таблиця 4.2 – Трудомісткість алгоритму Йонка у випадку $\nu>1, \mu>1$.

Величина параметра ν	Величина параметра μ				
	1	2	3	4	5
1	4	6	8	10	12
2	6	12	20	30	42
3	8	20	40	70	112
4	10	30	70	140	252
5	12	42	112	252	504

Зовсім по-іншому буде у випадку, коли $\nu<1, \ \mu<1$. Покладемо в (4.18) $\nu=n/N<1, \ \mu=1-\nu=1-n/N<1$. Отримаємо

$$\frac{\alpha_i^{N/n}}{\alpha_i^{N/n}+\alpha_{i+1}^{N/(N-n)}} = \mathrm{B}_{n/N,1-n/N}. \tag{21}$$

В цьому випадку трудомісткість алгоритму Йонка дорівнює:

$$S=\frac{2}{\nu(1-\nu)\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = \frac{2}{1-\nu}\cdot\frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}. \tag{22}$$

Функція $S=S(\nu)$ досягає мінімуму у разі ν *=1/2*, тому

$$\mathrm{S}\le\frac{8}{\pi}\approx 2.5. \tag{23}$$

Тобто майже кожна пара чисел (α_i,α_{i+1}) дозволяє отримати випадкове бета-число $\mathrm{B}_{n/N,1-n/N}$, що свідчить про високу ефективність алгоритму Йонка в цьому випадку. Таким чином, генерування випадкових чисел $\Gamma_{n/N}$ полягає в наступному:

1. Генерується псевдовипадкове рівномірно розподілене число α і за ним обчислюється гамма-число Γ_1.
2. Генерується пара чисел (α_i,α_{i+1}).
3. Перевіряється умова: $\alpha_i^{N/n}+\alpha_{i+1}^{N/(N-n)}<1$. Якщо вона істинна, то обчислюється число $\mathrm{B}_{n/N,1-n/N} = \frac{\alpha_i^{N/n}}{\alpha_i^{N/n}+\alpha_{i+1}^{N/(N-n)}}$. Якщо умова невірна, то повертаємося на пункт 2.
4. Обчислюється шукане число $\Gamma_{n/N}$ згідно з виразом (16).

Датчик ерлангівських $\Gamma_{k+n/N}$-чисел. Як уже було показано, випадкова величина $\Gamma_{k+n/N}$ може бути одержана шляхом суперпозиції випадкових величин Γ_k і $\Gamma_{n/N}$, алгоритми генерування яких розглянуті вище, а саме $\Gamma_{k+n/N} = \Gamma_k + \Gamma_{n/N}$. Крім того, зауважимо, що запропоновані в даній роботі датчики випадкових величин $\Gamma_{n/N}$ і $\Gamma_{k+n/N}$ разом з датчиком Γ_k-чисел можуть бути використані для одержання випадкових бета-чисел $B_{\nu,\mu}$ з параметрами ν,μ. В цьому легко переконатись записавши формулу (14) у вигляді

$$B_{\nu,\mu} = \frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_\nu + \Gamma_\mu}. \tag{24}$$

Висновки та рекомендації

1. Запропоновано датчик випадкових чисел Γ_k з розподілом Ерланга з цілим значенням параметра стабільності операції *k* шляхом накладання обмежень на величину отримуваних чисел.
2. Запропоновано датчик випадкових чисел з розподілом Ерланга з дробовим $\Gamma_{n/N}$ та змішаним $\Gamma_{k+n/N}$ значеннями параметра стабільності операції *k*.
3. Визначена трудомісткість алгоритму Йонка.
4. Запропоновані датчики випадкових чисел з розподілом Ерланга рекомендуються до використання в алгоритмах імітаційного моделювання реальних стохастичних процесів.

1. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание: теория и приложения. -М.: Мир, 1965. - 302 с.
2. Саати Т.Д. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. - М.: Сов. радио, 1965. - 510 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов. радио, 1972. - 551 с.
5. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973. - 307 с.
6. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. -М.: Наука, 1985. - 78 с.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982. - 296 с.
8.Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. - М.: Наука, 1968. - 288 с.
9. Hammersley J.M., Handscomd D.S. Monte-Carlo methods. - London, Methueu; New York, Wiley, 1964. - 127 p.