

УДК 539.3

К.В.Мельник, В.А. Кошелюк

Луцький національний технічний університет

## МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

*Моделювання контактних задач методами квадратичного програмування. В роботі розглядається контактна задача для шару, що лежить на опорах. Проводиться дослідження процесу відставання під штампом з гладкою основою. Розв'язок задачі будується на основі методу інтегральних рівнянь-нерівностей і квадратичного програмування. Проведено порівняння з контактною задачею для півпростору.*

Ключові слова: контактні напруження, пружний півпростір, жорсткий штамп, товста плита, ролик, переміщення, квадратичне програмування.

Методи розв'язання контактних задач з наперед заданою областю контакту достатньо представлені в роботах [1-4]. У випадку негерцевського контакту багато задач не допускають аналітичного рішення в замкнутій формі, наприклад, коли необхідно враховувати сили тертя, часткове проковзування, або враховувати умови відставання штампа від основи. Це привело до розвитку різноманітних чисельних методів. Основна проблема полягає в знаходженні нормальних та дотичних напружень, які виникають в області контакту. Форма і розмір області контакту наперед невідома.

Застосування варіаційних методів до контактних задач дозволяють визначити форму і розмір області контакту, а також застосувати добре розроблені методи оптимізації, а саме методи квадратичного програмування.

Варіаційна постановка задачі одностороннього контакту без тертя вперше представлена в роботах Сінборіні А. Отримані ним результати були узагальнені в роботах Стампакк'я, Дюво Ж., Фікера [5], Кравчука А.С. та інших. Питаннями існування і єдиності розв'язку контактної задачі для двох тіл, які мають неперервні гладкі поверхні, і контактують з повним зміщенням  $\delta$ , займалися Фішер, Дувайт і Ліонс. Вони показали, що істинні область контакту і поверхневі зміщення є ті, які мінімізують повну енергію напруження.

Розглянемо задачу про контакт без тертя одного жорсткого штампу з пружним шаром, товщиною  $2h$ , що лежить на опорах. Площадка контакту опор мала, що дозволяє замінити їх дією зосереджених сил. Поза штампом поверхня шару не навантажена. Нехай форма основи штампа в області контакту  $\Omega$  визначається функцією  $f(x, y)$ . Штамп втискається в шар силою  $P$ . Необхідно знайти розподілення нормальних контактних напружень під штампом. Граничні умови задачі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y, \pm h) = \tau_{zx}(x, y, \pm h) &= 0, \\ \omega(x, y, h) &= -(\delta + \alpha x + \beta y - f(x, y)) \quad (x, y) \in \Omega \\ \sigma_z(x, y, \pm h) &= \begin{cases} -q(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\delta, \beta, \alpha$  визначаються з умови рівноваги штампа

$$P = \int_{\Omega} q(\xi, \eta) d\Omega, \quad M_x = \int_{\Omega} \eta q(\xi, \eta) d\Omega, \quad M_y = \int_{\Omega} \xi q(\xi, \eta) d\Omega.$$

Нормальні переміщення границі шару  $z = h$  визначаються так:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_s + \omega_{op}, \\ \omega_s(x, y, z) &= \lambda \iint_{\Omega} q(\xi, \eta) F(x - \xi, y - \eta, h, h) d\xi d\eta, \\ \omega_{op} &= \sum_{i=1}^N Z_i \omega_i(x - x_i, y - y_i, h, -h), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $F(x-\xi, y-\eta, h, h)$  – переміщення границі  $z = h$ , що виникають в точці  $(x, y, h)$  від сили, прикладеної в точці  $(\xi, \eta, h)$ ,  $\lambda = \frac{1-\nu}{2\pi G}$ ,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $G$  – модуль зсуву,  $\Omega$  – область контакту (невідомо);  $\omega_i(x-x_i, y-y_i, h, -h)$  – переміщення, що виникають в точці  $(x, y, h)$  при дії опори в точці  $(x_i, y_i, -h)$  силою  $Z_i$ ,  $i = 1, N$ ,  $N$  – кількість опор. Величини сил  $Z_i$  вибираються так, щоб виконувалися умови рівноваги:

$$Z_i = \frac{1}{N} \iint_{\Omega} q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3)$$

В даній роботі вважаємо, що задана сила  $P$ , а переміщення штамп  $\delta$  і коефіцієнти  $\beta, \alpha$  необхідно знайти. Перепишемо рівняння (2) у вигляді:

$$\lambda \iint_{\Omega} q(\xi, \eta) \left( F(x-\xi, y-\eta, h, h) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i(x-x_i, y-y_i, h, -h) \right) d\xi d\eta = \omega \quad (4)$$

Інтегральне рівняння (4) запишемо у вигляді альтернативних інтегральних рівнянь-нерівностей і зведемо задачу до задачі квадратичного програмування. Застосуємо чисельний алгоритм, розроблений в роботі [6-8]. Приходимо до такої постановки задачі:

$$Y = \sum_{v=N_1}^{N_2} \sum_{\mu=M_1}^{M_2} C_{v,\mu} \left( \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} (B_{v,\mu,n,m} q_{n,m} - F_{v,\mu}) q_{v,\mu} \right) \quad (5)$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} B_{v,\mu,n,m} q_{n,m} \leq F_{v,\mu}, \quad (6)$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} q_{n,m} = \lambda P / h_x h_y, \quad \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} y_m q_{n,m} = M_x,$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} x_n q_{n,m} = M_y, \quad q_{n,m} \leq 0,$$

де  $q_{n,m} = \lambda q_{n,m}$ ,  $h_x, h_y$  – крок розбиття сітки.

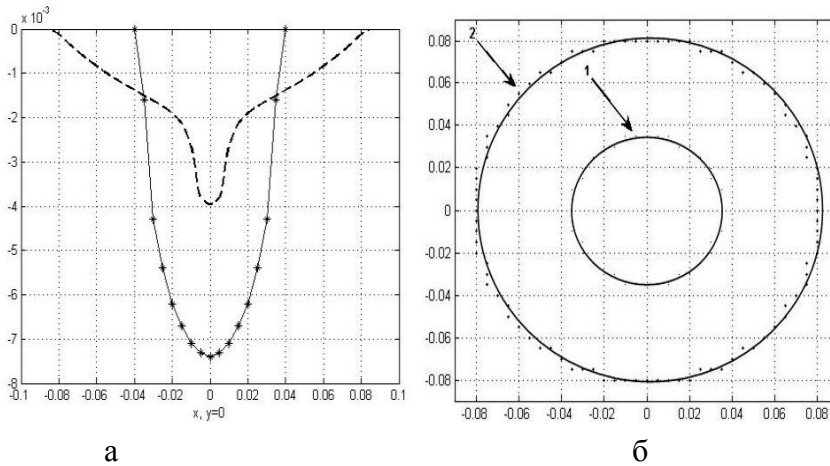


Рис. 1. Контактні напруження при зміні відстані між опорами

відносній товщині плити  $h/R_2 = 0,5$ , крок розбиття сітки  $h_x/R_2 = h_y/R_2 = 0,005$  (рис. 1). Кривою 1 наведено відносні контактні напруження  $\lambda\sigma(x, 0)$  для плити, опори якої знаходяться в точках  $(\pm 0,08h, 0, -h)$ ,  $(0, \pm 0,08h, -h)$ , а кривою 2 – в точках  $(\pm 50h, 0, -h)$ ,  $(0, \pm 50h, -h)$ . Для порівняння точками зображено відносні контактні напруження для півпростору.

Проведено розрахунки для штамп, що має параболічну форму  $f(x, y) = (r/R_0)^m$  і взаємодіє з плитою, відносною товщиною  $h/R_0 = 1/5$ , яка лежить на чотирьох опорах в точках

На рис.1 а) суцільною лінією наведено графік величин  $\lambda q(x, 0)$ , обчислених за формулами (5-6), коли штамп має форму еліптичного параболоїда:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \quad (R_2 \geq R_1) \quad (7)$$

при різних відстанях між опорами і параметрах  $P = 10^7 H$ ,  $R_1/R_2 = 1$ ,  $G_1 \cdot 10^{-10} = 7 Pa$ ,  $\nu_1 = 0,1$ ,

$(\pm 10h, 0, -h)$ ,  $(0, \pm 10h, -h)$ . На рис. 2 зображено відносні контактні напруження  $\lambda\sigma(x', 0)$  і область контакту при  $m = 6$ , крок розбиття сітки  $h_x/h = H_y/h = 0,5$ . Результати розрахунків при  $m = 8$  (штамп має близьку до плоскої форму із закругленими краями) показано на рис. 3.

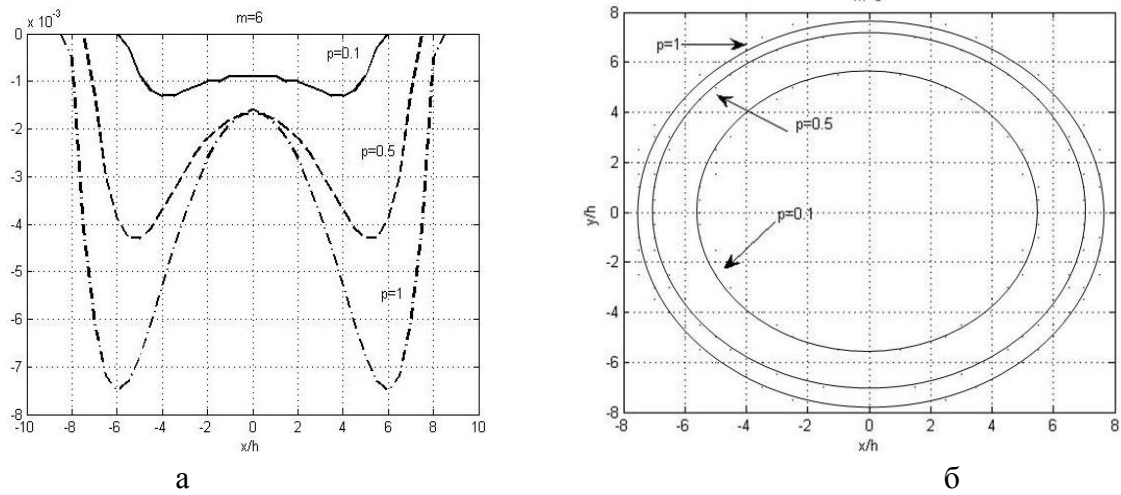


Рис. 2 Контактна взаємодія параболічного штампа з плитою на опорах при  $m = 6$ ,  $h/R_0 = 1/5$

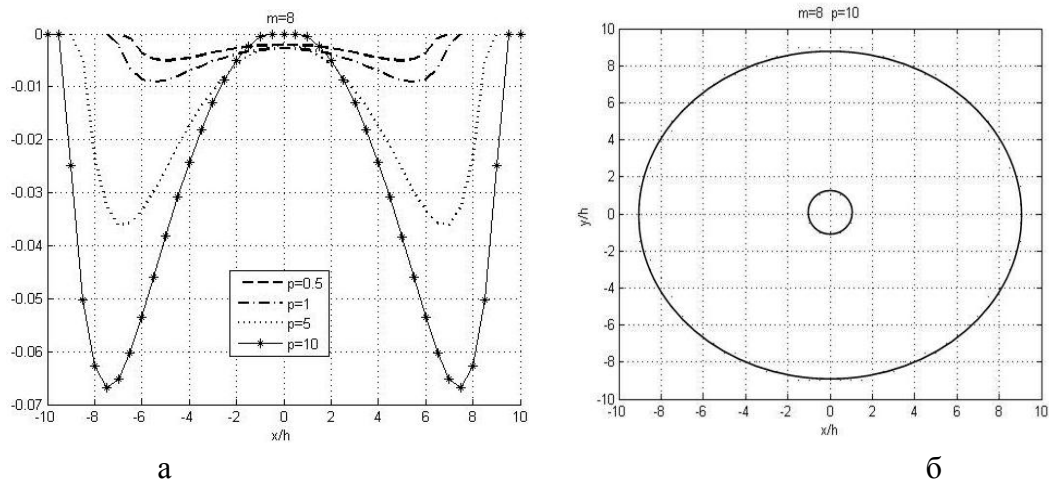


Рис. 3 Контактна взаємодія параболічного штампа з плитою на опорах при  $h/R_0 = 1/5$ ,  $m = 8$

На основі проведених досліджень встановлено, що для штампів ( $m = 8$ ), у яких відношення радіуса області контакту до товщини плити більше за 5, в центрі області контакту починається відставання штампа від основи.

В літературі часто сферичну та інші форми штампів замінюють параболічною формою, що спрощує розрахунки з використанням аналітичних методів.

Проведено дослідження для штампів сферичної форми

$$f(x, y) = \begin{cases} R - \sqrt{R^2 - r^2} \text{ при } r \leq R, \\ \sqrt{3}(r - R) + R \text{ при } r > R \end{cases}, \quad (8)$$

де  $R = \frac{R_0^2}{2}$  та параболічної форми при  $m = 2$ , що мають однаковий радіус кривини у вершині.

Результати розрахунків наведено для різних значень сили  $P$ , крок розбиття сітки  $h_x/h = H_y/h = 1$ , координати точок опор  $(\pm 40h, 0, -h)$ ,  $(0, \pm 40h, -h)$ . На рис. 4 зображено відносні контактні напруження  $\lambda\sigma(x', 0)$  для плити товщиною  $h/R_0 = 1/5$ . Встановлено, що при  $\lambda P = 0,0065$  починається процес відставання штампа від основи.

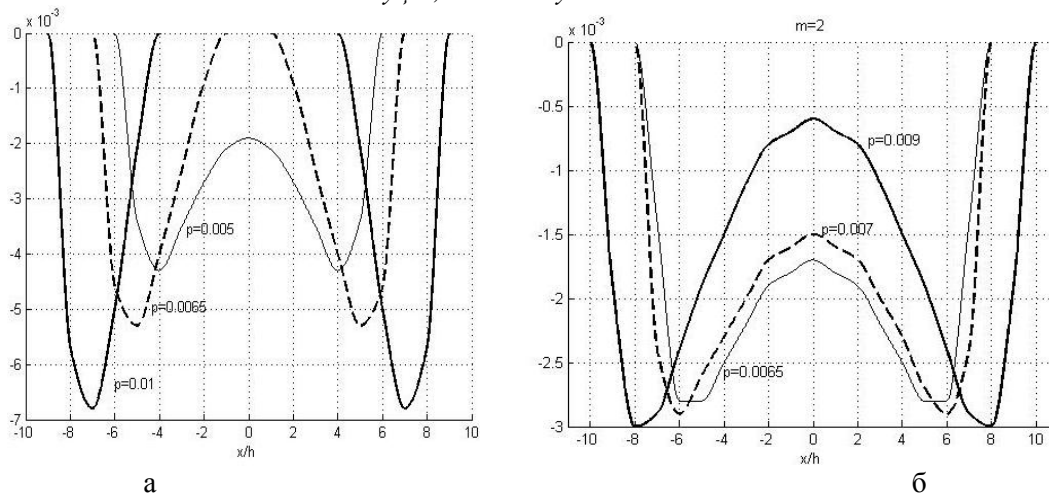


Рис. 4 Відносні контактні напруження при  $h/R_0 = 1/5$

З наведених рисунків видно, що у випадку, коли розміри ділянки контакту малі в порівнянні з товщиною плити, заміна форми штампів параболічною є правомірною. Коли області контакту сумірні з товщиною плити, контактні напруження для сферичного штамп збільшуються в 2 рази в порівнянні з параболічним штампом. При цьому для штамп сферичної форми в центрі області контакту починається процес його відставання від основи. Отже, заміна форми штамп параболічною може приводить до значних похибок.

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М. –Л.: Гостехиздат, 1949.272 с.
5. Фикер Г. Теоремы существования в теории упругости. М., 1974.
6. Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge University Press. 1985.
7. Signorini. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearzzata // Rend. Di Matem/ e delle sue appl., 1959. V. 18, № 1-2.Р. 95-139.
8. Маркова К. В. Дослідження контактних напружень під штампами складної форми з врахуванням відліпання. Матеріали конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», у 3-х томах, Львів 2008. - с. 2.61-2.63.