

УДК 539.3

О.В. Максимович, Н.В. Багнюк

Луцький національний технічний університет

## СУМІСНЕ ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ FORTRAN ТА MATLAB ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ ІЗ ЗАКРУГЛЕНИМИ КУТАМИ В АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНКАХ

У статті наведено алгоритм дослідження напруженого стану анізотропних пластинок, послаблених отворами із заокругленими кутами та його реалізація засобами систем Fortran та Matlab. Алгоритм ґрунтується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь та асимптотичних методів. На прикладах показана ефективність алгоритму.

Ключові слова: Алгоритм, анізотропна пластинка, отвори із заокругленими кутами, концентрація напружень, системи Fortran та Matlab.

Стаття присвячена ілюстрації можливостей однієї з найбільш ефективних систем комп'ютерного програмного забезпечення – пакету універсальних інтегрованих програм MATLAB та середовища Fortran при дослідженні важливих проблем теорії пружності.

При розгляді отворів із заокругленими кутами коефіцієнти концентрації напружень (ККН) у кутових точках зростають і можуть стати нескінченними. Тому прямі числові методи дослідження напружень для таких отворів є малоефективними.

Для дослідження високо локалізованого напруженого стану біля отворів в ізотропних пластинках розроблені нові ефективні методики, в яких метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР) використовується сумісно з асимптотичними методами [1, 2,3]. В статті розглянуто такі задачі для анізотропних пластинок.

Розглянемо випадок, коли межа отвору має кутові точки. В околі кутових точок напруження мають степеневі особливості []:  $\sigma_{ij} = f_{ij}(\varphi) / R^\mu$ , де  $(R, \varphi)$  – полярна система координат з центром у кутовій точці,  $\mu$  – показник, який визначається із характеристичного рівняння, причому  $\mu < 0,5$ . Тобто, в околі кутової точки напруження можуть бути нескінченними, у зв'язку з цим ефективність безпосереднього використання МГІР для таких задач знижується. В реальних отворах кути є заокругленими. Для ізотропних пластинок в літературі встановлено [4], що при малих радіусах закруглення кутів  $r$  для максимальних напружень у околі вершини справедливе асимптотичне зображення вигляду  $\sigma_{\max} \sim C / r^\mu$ , де  $C$  – стала, яка залежить від форми отвору та прикладеного навантаження,  $\mu$  – вказаний вище показник для клина. Будемо знаходити напруження в анізотропних пластинках в околі заокруглених кутів з сумісним використанням МГІР і асимптотичних представлень для напружень в клині.

**Алгоритм дослідження напруженого стану в околі заокруглених вершин на отворах.** Розглянемо анізотропну пластинку з отвором із кутовими точками, яка перебуває під дією одностороннього розтягу на нескінченності. Для опису межі отвору будемо використовувати функції, що конформно відображають область, яку займає пластинка на зовнішність одиничного круга в допоміжній області  $\zeta$ :  $z = \omega(\zeta)$ . При описі межі отвору прийемо далі, що відомий розклад в ряд

$$\omega(\sigma) = c\sigma + \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{\sigma^n}, \quad (1)$$

при довільній кількості членів ряду  $N$ , де  $\sigma = e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta \leq 2\pi$ . Якщо обмежитись кінцевою кількістю членів ряду, то функція (1) є параметричним заданням для межі отвору із заокругленими кутами.

Кривина в довільній точці отвору визначається за формулою [5]

$$k_r = \frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \left( 1 + \operatorname{Re} \frac{\sigma \omega''(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right). \quad (2)$$

Радіуси кривини в околі кутових точок будуть зменшуватись при збільшенні кількості членів ряду. Для опису форми отвору на його гладких ділянках, як правило, можна обмежитись

тільки першими декількома (~20-40) членами ряду [5], в той же час для достатньо точного опису межі отворів в околі вершин необхідно брати в ряді (1) до 100 і більше членів.

Для дослідження напруженого стану проводимо розв'язування поставленої задачі МГПР, коли для опису граничного контуру отвору використовується формула (1) при різних кількостях членів в ряді –  $N = N_j$  ( $j = 1, \dots, K$ ). Позначимо далі отримані в результаті розрахунків максимальні відносні напруження  $\sigma_{\max} / p$  в закругленій вершині отвору через  $\sigma_j$  і відносні радіуси кривини  $r/a$  закруглених вершин – через  $\rho_j$ , де  $a$  – характерний розмір отвору. Зазначимо, що при збільшенні кількості членів ряду зростає концентрація напружень, в зв'язку з чим для забезпечення контрольованої точності розрахунків необхідно збільшувати кількість вузлових точок в квадратурному методі розв'язування інтегральних рівнянь, що зумовлює розв'язувати системи алгебраїчних 1000 і більше рівнянь. Очевидно, що максимальні відносні напруження, які позначимо через  $S$ , в околі закругленої вершини отвору є функцією радіусу кривини  $S = S(\rho)$ . При малих значеннях  $\rho$ , за аналогією до ізотропних пластинок [1, 2], будемо шукати цю функцію у вигляді  $S = f(\rho)$ , де

$$f(\rho) = C_0 + \frac{C_1}{\rho^{\mu_1}} + \frac{C_2}{\rho^{\mu_2}}, \quad (3)$$

де  $C_0, C_1, C_2$  – сталі, які залежать від форми отвору поза вершиною та від прикладеного навантаження,  $\mu_{1,2}$  – дійсні корені характеристичного рівняння [4]. У випадку, коли отвір симетричний відносно осі  $Ox$ , яка є головною віссю ортотропії та напружений стан є симетричний відносно цієї осі, то  $C_2 = 0$ . Сталі  $C_{0,1,2}$  визначаємо методом найменших квадратів так, щоби величина

$$I = \sum_{j=1}^K [f(\rho_j) - \sigma_j]^2 \quad (4)$$

була мінімальною.

Для реалізації алгоритму задачі використано сумісно системи "Fortran" (в якій розраховувався напружений стан) та "Matlab" [6] (реалізація методу найменших квадратів та візуалізація розрахунків), що дозволило використати високу швидкодію обчислень першої системи та створені процедури другої системи.

**Приклади розрахунку напружень в пластинці з отворами різної форми при односторонньому розтягу.**

**Квадратний отвір.** Розглянемо пластинку з квадратним отвором, діагоналі якого лежать на координатних осях, що розтягується в напрямку осі  $Oy$  зусиллями  $p$ . При розрахунках враховано, що напружений стан є симетричний відносно осі  $Ox$ , в зв'язку з чим у формулі (3) поклали  $C_2 = 0$ . Розв'язування задачі теорії пружності проводилось також на основі інтегральних рівнянь, в яких врахована симетрія напруженого стану в пластинці відносно осі  $Ox$  (використовувалось зображення (2) та система лінійних алгебраїчних рівнянь (4).

В таблиці 1 наведено результати розрахунків для ізотропної пластинки: кількість членів  $N_j = 10j$  при  $j = 1, \dots, 12$ ; відповідні їм значення відносних кривин  $\rho_j$ , що знаходились за формулою (2); розраховані значення відносних напружень  $\sigma_j$  (знайдені за допомогою МГПР) і  $S = f(\rho_j)$  (обчислені за формулою (3)); величини  $\lambda_j = \sigma_j \rho_j^{\mu_1}$ ; відносна похибка  $\varepsilon$  (в процентах) розрахованих напружень за формулою (3). За параметр  $a$  тут вибрано півдіагональ квадрата, знайдене значення коефіцієнта в формулі (3)  $C_1 = 2,49$ . Коефіцієнт  $C_0$  для даної задачі і розглянутих нижче виявився практично рівним нулю, тому його не враховували при розрахунках. Значення ступеня  $\mu_1$  згідно [4] рівне  $0,4555$  (при  $\phi = 135^\circ$ ).

**Таблиця 1** Ізотропна пластинка з квадратним отвором

$N_j$	$\rho_j$	$\lambda_j$	$\sigma_j$	$S(\rho_j)$	$\varepsilon, \%$
120	0.000708	2,489	67,763	67,807	0,065
60	0.001977	2,489	42,447	42,465	0,043
20	0.009782	2,492	20,507	20,497	-0,048

10	0.03478	2,500	11,545	11,501	-0,379
----	---------	-------	--------	--------	--------

Наведені в таблиці значення величин  $\lambda_j = \sigma_j \rho_j^{\mu_1}$  підтверджують те, що для напружень при малих кривинах справедливе асимптотичне зображення (3). Наведені значення відносної похибки  $\varepsilon$ , яка виявилась при  $N \geq 20$  меншою за 0,1%, вказують, що формула (3) є практично точною.

Аналогічні результати розрахунків для анізотропної пластинки, що виготовлена із матеріалів CF1, CF1<sub>90</sub>, наведені в таблиці 2, 3. Із таблиць видно, що і для цих матеріалів величини  $\lambda_j$  виявились практично сталими. Значення відносної похибки  $\varepsilon$  при  $N \geq 20$  є менші за 0,2%, що вказує на практичну точність формули (3) при розрахунках концентрації напружень для ізотропних та ортотропних матеріалів з різним ступенем анізотропії біля квадратного отвору при радіусах закруглення вершин  $r < 0,22a$ . Зазначимо, що у всіх випадках максимальні напруження визначаються за простою формулою

$$S(\rho) = C_1 / \rho^{\mu_1}. \quad (5)$$

**Таблиця 2** – Пластинка з матеріалу CF1 з квадратним отвором

$N_j$	$\rho_j$	$\lambda_j$	$\sigma_j$	$S(\rho_j)$	$\varepsilon, \%$
120	0.000708	12,847	466,438	466,360	-0,017
60	0.001977	12,844	280,391	280,397	0,002
20	0.009782	12,837	126,950	127,022	0,057
10	0.03478	12,813	67,607	67,775	0,249

**Таблиця 3** – Пластинка з матеріалу CF1<sub>90</sub>.  $C_1 = 2,458$ ,  $\mu_1 = 0,4135$

$N_j$	$\rho_j$	$\lambda_j$	$\sigma_j$	$S(\rho_j)$	$\varepsilon, \%$
120	0.000708	2,458	49,339	49,346	0,014
60	0.001977	2,458	32,267	32,267	-0,001
20	0.009782	2,460	16,666	16,657	-0,053
10	0.03478	2,463	9,876	9,858	-0,180

Сталу  $C_1$  у формулі (5) за аналогією до КІН  $K_I$  для тріщини, можна вважати як коефіцієнт інтенсивності концентрації напружень для закруглених кутів. Зокрема, на основі цих сталих можна порівнювати міцність і довговічність пластинок з різними формами отворів за однакових радіусів закруглення кутів. Позначимо для двох таких пластинок знайдені значення сталої  $C_1$  через  $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}$ . Тоді рівноцінними за міцністю будуть такі пластинки, для яких значення прикладених до них зусиль  $p_1$  і  $p_2$  задовольняють умові  $p_1 / p_2 = C_1^{(2)} / C_1^{(1)}$ . Звідси випливає можливість оцінювати міцність отворів складної форми із закругленими кутами на основі експериментальних даних для зразків простої форми із кутовими закругленими вирізами. Співвідношення (5) можна вважати простою інженерною формулою, яка дає можливість з достатньою для практики точністю (~1%) визначати напруження в закруглених кутах. Із наведених вище таблиць випливає, що значення величин  $\lambda_j = \sigma_j \rho_j^{\mu_1}$  виявилась практично сталими, якщо в формулі (1) вибрати  $N \geq 10$  (при  $\rho < 0,035$ ). Звідси видно, що єдина стала  $C_1$ , яка входить у формулу (5) може бути визначена тільки на основі знайдених максимальних напружень для одного значення  $N$ , більшого за 10.

**Напруження біля закругленої вершини кругового двокутника.** Розглянемо детальніше випадок отвору, що має вигляд кругового двокутника, дуги кола однакового радіусу в якого перетинаються під кутом  $\alpha$ . Відносні максимальні напруження в закругленій вершині двокутника будемо описувати функцією (3) при  $C_0 = 0$ . Тут розглядається випадок, коли характеристичне рівняння має додатково близький до нуля від'ємний корінь, який позначено  $\mu_2$ . У випадку, коли

такий корінь буде відсутній, будемо покласти  $\mu_2 = 0$ . В таблиці 4 наведено корені  $\mu_{1,2}$  та знайдені значення коефіцієнтів формули для різних кутів між дугами кола для ізотропного матеріалу та матеріалу CF1 у випадку, коли напрямок максимальної жорсткості паралельний координатній осі  $Oy$  або  $Ox$ .

**Таблиця 4** – Коефіцієнти формули (3)

Матеріал	$\alpha$	$C_1$	$C_2$	$\mu_1$	$\mu_2$
Ізотропія	20	2,005	6,64	0,4996	-0,1254
	30	2,031	16,8	0,4985	-0,203
	40	2,067	4,07	0,4965	-0,3027
	60	2,185	0,082	0,4878	0
	70	2,275	-0,0142	0,4801	0
	80	2,387	-0,085	0,4696	0
	90	2,527	-0,158	0,4555	0
	100	2,696	-0,222	0,4372	0
	110	2,899	-0,295	0,4137	0
	120	3,114	-0,23	0,3843	0
CF1	20	13,41	-274	0,4999	-0,111
	30	12,84	-121	0,4998	-0,1721
	40	12,6	-56,2	0,4996	-0,2359
	60	12,5	13,3	0,4986	-0,3782
	70	12,5	2,44	0,4978	0
	80	12,56	2,44	0,4967	0
	90	12,65	1,89	0,4952	0
	100	12,81	0,972	0,4932	0
	110	12,94	0,421	0,4906	0
	120	13,1	0,0748	0,4869	0
CF1 <sub>90</sub>	20	1,793	7,47	0,4985	0
	30	2,026	0,89	0,4857	0
	40	2,127	0,171	0,477	0
	60	2,323	-0,073	0,4561	0
	70	2,425	-0,092	0,4437	0
	80	2,534	-0,112	0,4296	0
	90	2,65	-0,129	0,4135	0
	100	2,779	-0,158	0,3947	0
	110	2,924	-0,197	0,3725	0
	120	3,084	-0,242	0,3461	0

Розподіл максимальних напружень для ізотропних пластинок залежно від кривини при кутах між дугами кола, що рівні  $\alpha = 10j$ ,  $j = 2, \dots, 7$ , наведено на рис. 1 (біля кривих вказано значення  $j$ ). На рис. 2 наведено розподіл максимальних напружень при  $j = 8, \dots, 12$ . На рис. 3 зверху наведено розподіл максимальних напружень при значенні кута  $\alpha = 20^\circ$ , а внизу – відносна похибка в процентах формули (3) при кутах між дугами  $\alpha = 10j$ ,  $j = 2, \dots, 5$ .

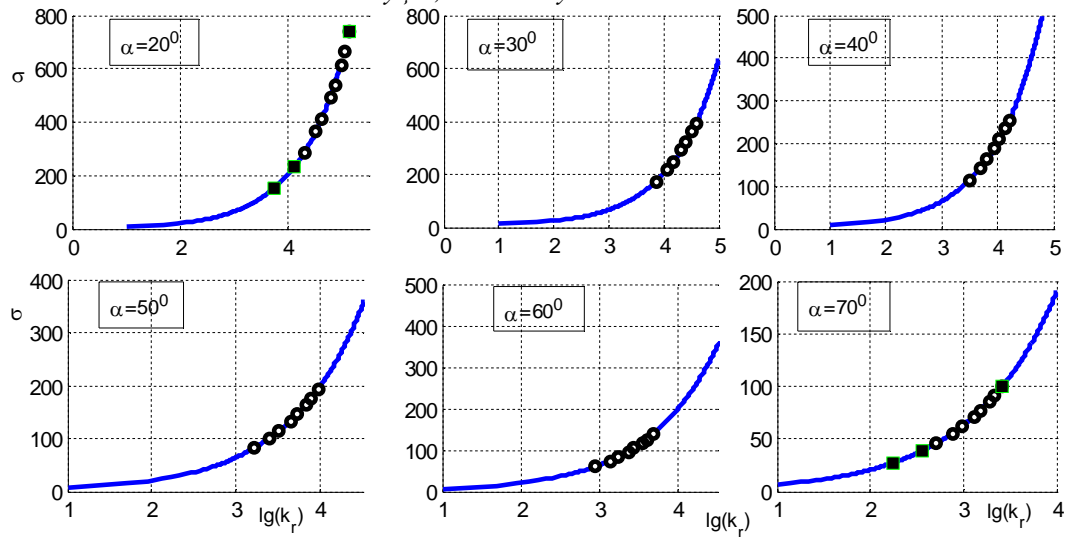


Рис. 1 Максимальні напруження при кутах між дугами  $\alpha = 10j, j = 2, \dots, 7$

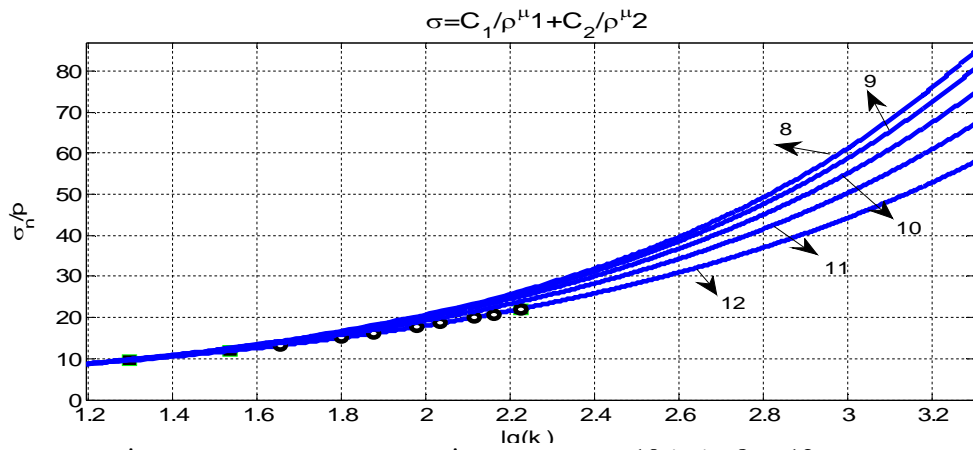


Рис. 2 Максимальні напруження при кутах між дугами  $\alpha = 10j, j = 8, \dots, 12$ .

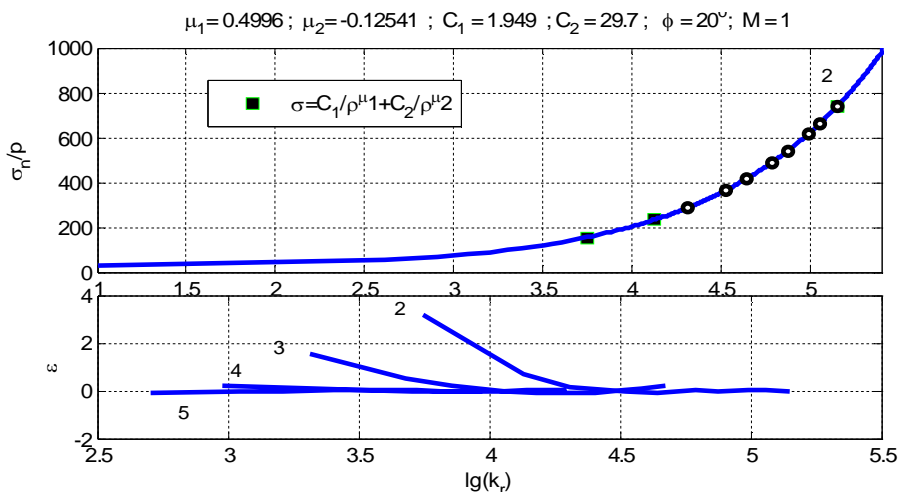


Рис. 3 Максимальні напруження при  $\alpha = 10^\circ$  (наверху) і похибка (внизу)

Аналогічні результати для матеріалу CF1 наведено на рис. 4 та з повернутими осями ортотропії на  $90^\circ$  (CF1<sub>90</sub>) – на рис. 5.

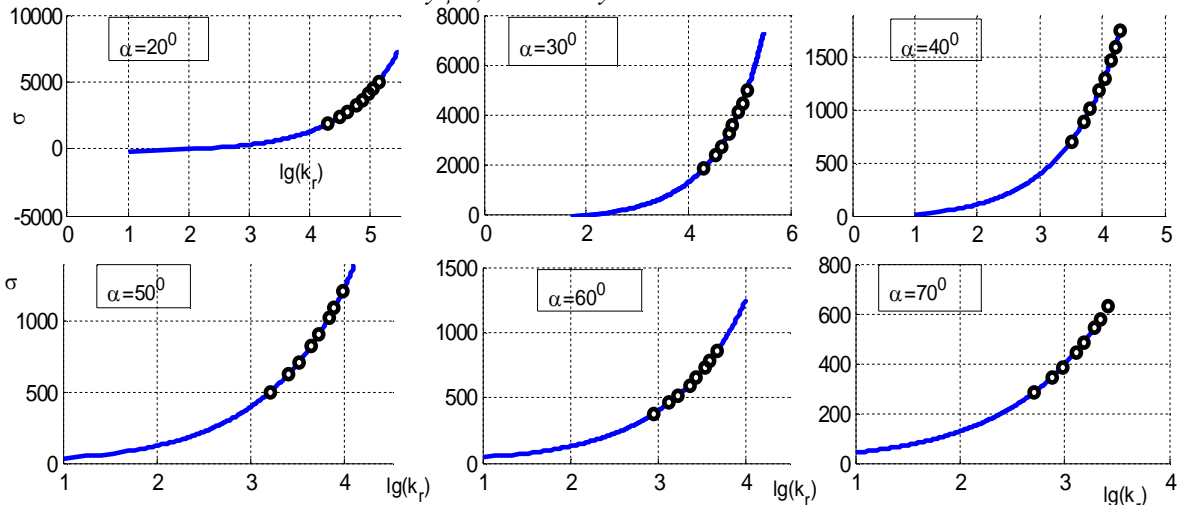


Рис. 4. Максимальні напруження в пластинці з матеріалу CF1 при значеннях кутів між дугами кола  $\alpha = 20^\circ, \dots, 70^\circ$

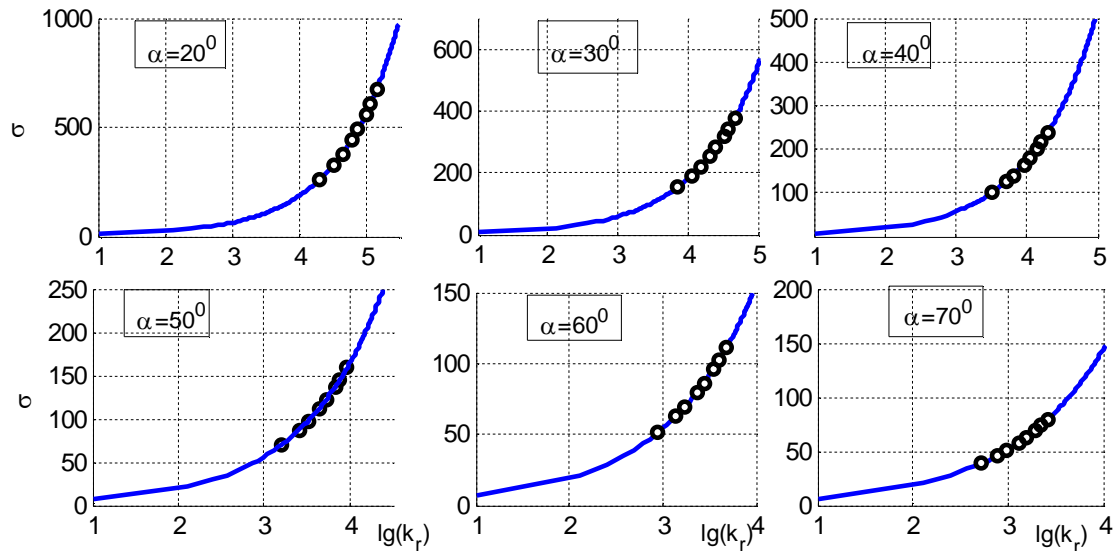


Рис. 5. Максимальні напруження в пластинці з матеріалу CF1<sub>90</sub> при значеннях кутів між дугами кола  $\alpha = 20^\circ, \dots, 70^\circ$

Розраховані значення відносної похибки (в процентах) інтерполяційної формули для різних кутів між дугами кола наведено на рис. 6.

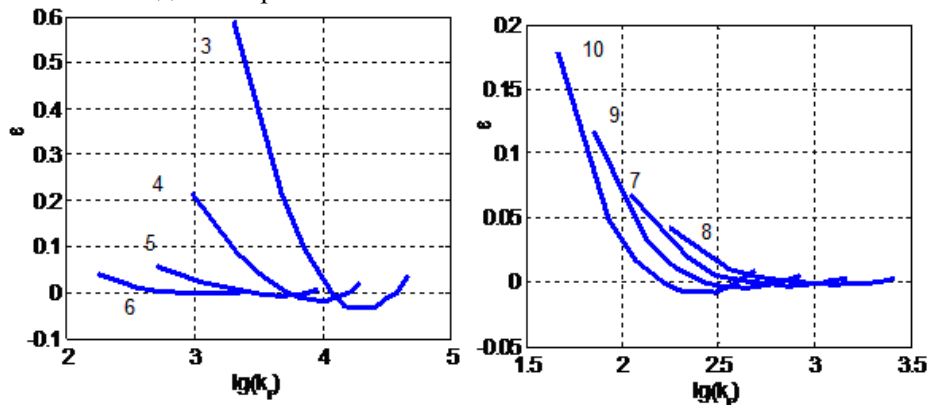


Рис. 6. Похибка інтерполяційної формули

Проведено розрахунки коефіцієнтів формули (3) для отворів різної форми: ромба з різними кутами між сторонами, квадрата, шестикутника, восьмикутника для пластинок, що виготовлені із ізотропного матеріалу та матеріалів CF1 при односторонньому розтягу в напрямку осі  $Oy$ . У

випадку, коли осі ортотропії повернуті відносно діагоналі отвору на  $45^0$  і  $90^0$  – біля матеріалу наведено значення цього кута. Розраховані коефіцієнти та показники ступенів у формулі (3) наведено в таблиці 5. У всіх розглянутих випадках за параметр  $a$  вибрано півдовжину діагоналі, яка лежить на осі  $Ox$ .

В таблиці наведено також результати розрахунків для ромбовидного отвору з центром в точці  $(0, -1,25a)$  при куті  $\alpha = 90^0$  (квадратний отвір) у півплощині за її розтягу на нескінченності зусиллями  $p$  в напрямку осі  $Ox$ . Розглянуто ізотропний матеріал та матеріали CF1, за параметр  $a$  вибрано півдіагональ, максимальні напруження досягались у ближчій до межі півплощини вершині отвору. Їх результати наведені також в таблиці та на рис. 7, 8.

Таблиця 5 – Коефіцієнти формули (3)

Матеріал	$b/a$	$C_0$	$\mu_1$	$C_2$	$\mu_2$
Ізотропія	Ромб, $\alpha = 90^0$	2,49	0,4555	0	0
	Ромб, $\alpha = 60^0$	2,22		0	0
	Ромб, $\alpha = 45^0$	2,126		0	0
	Шестикутник	2,255		-0,0019	0
	Восьмикутник	2,834	0,325	0	0
CF1	Ромб, $\alpha = 90^0$	12,845	0,4952	0	0
	Ромб, $\alpha = 60^0$	12,657	0,4986	0	0
	Ромб, $\alpha = 45^0$	12,59		0	0
	Шестикутник	12,993	0,4869	0	0
	Восьмикутник	13,054	0,4773	0	0
CF1 <sub>90</sub>	Ромб, $\alpha = 90^0$	2,458	0,4135	0	0
	Ромб, $\alpha = 60^0$	2,255	0,4561	0	0
	Ромб, $\alpha = 45^0$	2,15	0,4135	0	0
CF1 <sub>45</sub>	Шестикутник	9,256	0,280	6,644	0
Півплощина, центр отвору в точці $(0, -1,25a)$					
Ізотропія	Ромб, $\alpha = 90^0$	3,642	0,4555	0,146	0
CF1		3,984	0,4135	0,19	0
CF190		16,48	0,4952	2,18	0

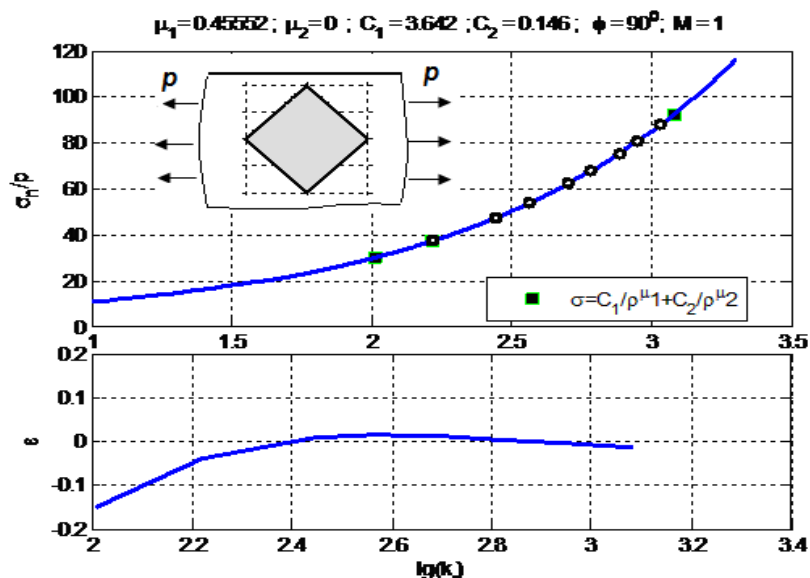


Рис. 7. Максимальні напруження у вершині квадратного отвору в півплощині для ізотропної пластинки.

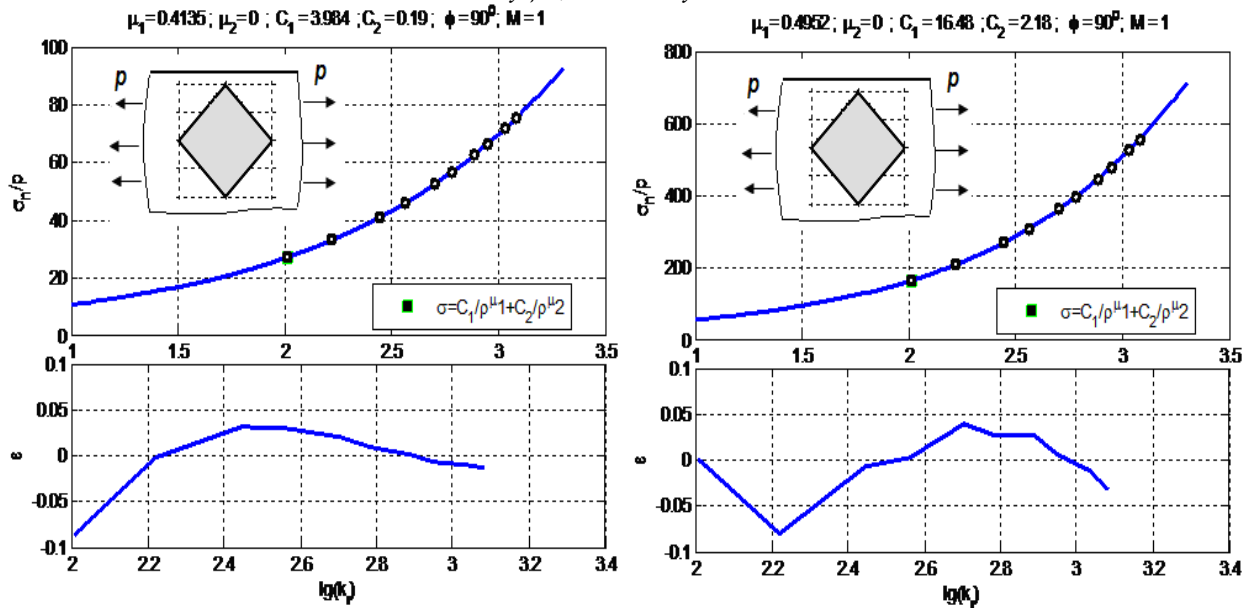


Рис. 8. Максимальні напруження у вершині квадратного отвору в півплощині для пластинки із матеріалу CF1 (зліва) і CF1<sub>90</sub>

Порівнюючи отримані результати для пластинки з отворами різної форми, які мають однакові за розмірами кути між дугами, можна зробити висновок, що напружений стан в околі кутових точок практично однаковий. Зокрема, знайдені значення коефіцієнтів для формули (6) для ізотропного матеріалу та для матеріалу CF1 при  $\alpha = 90^\circ$  будуть відповідно рівні  $C_1 = 2,49$  і  $C_1 = 12,845$  – для квадратного отвору та  $C_1 = 2,527$  і  $C_1 = 12,65$  – для отвору, що утворений перетином кіл.

Із наведених вище результатів можна зробити наступні висновки:

а) встановлено структуру для максимальних напружень в анізотропних пластинках із отворами, межі яких мають закруглені вершини кутів у вигляді (3), де  $\mu_{1,2}$  – додатні корені характеристичного рівняння для відповідного клина, що менші за 0,5. Для ортотропної пластинки за симетричного напруженого стану відносно бісектриси кута в цій формулі стали  $C_1, C_2$  можуть бути прийняті рівними нулю.

б) виконані розрахунки показали, що формула (5) є практично точною для отворів в широкому діапазоні зміни радіуса кривини. Тому проста формула (5) може бути використана для визначення ККН в інженерних розрахунках.

в) об'єднання можливостей систем MATLAB і Fortran дозволили на якісно вищому рівні провести дослідження напруженого стану анізотропних пластинок, послаблених отворами із заокругленими кутами.

1. Саврук М.П. Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів / М.П. Саврук, А. Казберук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42. – № 6. – С. 17-26.

2. Саврук М.П. Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов / М.П. Саврук, А. Казберук // Прикл. механика. – 2007. – 43. – № 2. – С. 70-87.

3. Duan Z.P. An integral equation method and its application to defect mechanics / Z.P. Duan, R. Kienzler, G. Herrmann // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – 34. – No. 6. – P. 539-561.

4. Денисюк І.Т. Пружна рівновага тіл з негладкими включеннями / І.Т.Денисюк // Луцьк: Ред.-видавничий відділ ЛДТУ, 2004. – С. 220.

5. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин // К.: Наук. думка, 1968. – С. 888.

6. Дашенко О.Ф., Кириллов В.Х., Коломієць Л.В., Оробей В.Ф. MATLAB в інженерних та наукових розрахунках: Монографія. – Одеса: Астропринт, 2003.-214 с.