УДК 517.926
Т.А.Крадінова, В.М.Тимощук
Луцький національний технічний університет

ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ ЗА ВІДСУТНОСТІ ОПОРУ

Розглянуто випадок коливань системи у випадку відсутності опору. Встановлено визначальну функцію, яка дозволяє інтегрувати вихідне рівняння коливань такої системи. Розглянуті випадки коли корені характеристичного рівняння є дійсними та комплексними.

Ключові слова: *параметричні коливання, диференціальне рівняння, визначальна функція.*

Коливання механічних систем зі сталими параметрами достатньо досліджені. Але часто на практиці зустрічаються коливання в яких маса, опір чи коефіцієнт жорсткості є змінними. Вважається що такі закони руху описуються складно і тому використовуються наближені розвязки, які визначають стійкі і нестійкі зони таких коливань [1,2]. Але закон коливного руху, швидкість, прискорення таких систем, не було знайдено. Якісні оцінки поведінки амплітуд і періодів коливань систем зі змінними масами, які отримані наближеними методами, розглянуто в [3].

Розглянемо рівняння коливань у випадку змінних коефіцієнтів маси, опору та жорсткості

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(t)\frac{dx}{dt}+c(t)x=0\,. \qquad (1)$$

В [4] показано, що загальний вигляд лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами, що інтегруються в квадратурах мають вигляд

$$\frac{C_0}{\left[f'(t)\right]^2}\frac{d^2x}{dt^2}+\left\{\frac{C_1}{f'(t)}-\frac{C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^3}\right\}\frac{dx}{dt}+C_2x=0,$$

$$\frac{C_0}{f'(t)}\frac{d^2x}{dt^2}+\left\{C_1-\frac{C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^2}\right\}\frac{dx}{dt}+C_2 f'(t)\,x=0, \qquad (2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left\{C_1 f'(t)-\frac{C_0 f''(t)}{f'(t)}\right\}\frac{dx}{dt}+C_2\left[f'(t)\right]^2x=0,$$

де $f(t)$ - визначальна функція, яка повинна бути неперервною на проміжку $t\in[0;+\infty)$, двічі диференційованою, і такою, щоб $f'(t)\neq 0$ на цьому проміжку. Сталі C_0, C_1, C_2 - коефіцієнти характеристичного рівняння відповідного (1) при новій змінній.

Перша форма рівняння інтегрованого в квадратурах відповідає випадку, коли жорсткість є сталою величиною; друга форма – коли маса, тертя та жорсткість є змінними; третя форма – коли маса буде сталою величиною.

Визначимо закон руху системи у випадку малого опору. Тобто розглянемо випадок неповного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами при $\mu(t)=0$.

Тоді рівність (1) приймає форму

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2}+c(t)x=0\,. \qquad (3)$$

Потрібно знайти який вигляд повинні мати коефіцієнти $m(t)$ та $c(t)$, щоб це рівняння інтегрувалось в квадратурах. Для цього спочатку визначимо $f(t)$. Використаємо першу форму вихідного рівняння (2). Тут

$$\mu(t)=\frac{C_1}{f'(t)}-\frac{C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^3}$$

Оскільки $\mu(t)=0$, то після перетворень знаходимо

$$f''(t) = \frac{C_1}{C_0}\left[f'(t)\right]^2. \qquad (4)$$

Позначимо $z = f(t)$, і $f'(t) = \frac{dz}{dt} = u$. Тоді

$$f''(t) = \frac{du}{dt} = u\frac{du}{dz}.$$

Підставивши дані позначення в (4) отримаємо

$$u\left(\frac{du}{dz} - \frac{C_1}{C_0}u\right) = 0.$$

Дане рівняння розбивається на два

$$u = 0 \quad \text{та} \quad \frac{du}{dz} - \frac{C_1}{C_0}u = 0. \qquad (5)$$

Перше з них дає тривіальний розв'язок $f(t) = C$. Розв'яжемо друге з рівняння (5) методом розділення змінних

$$\frac{du}{u} = \frac{C_1}{C_0}dz.$$

Проінтегрувавши, знаходимо

$$u = b_1 e^{\frac{C_1}{C_0}z}, \qquad (6)$$

де b_1 - перша стала інтегрування.

Враховуючи, що $u = \frac{dz}{dt}$, після розділення змінних в (6), отримаємо

$$e^{-\frac{C_1}{C_0}z}dz = b_1 dt.$$

Звідси знаходимо $z = -\frac{C_0}{C_1}\ln\left|-\frac{C_1}{C_0}(b_2 + b_1 t)\right|$,

де b_2 - друга стала інтегрування.

Повертаючись до позначень останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$f(t) = -\frac{C_0}{C_1}\ln\left|-\frac{C_1 b_2}{C_0}\left(1 + \frac{b_1}{b_2}t\right)\right|. \qquad (7)$$

Звідси знаходимо

$$f'(t) = -\frac{C_0 b_1}{C_1 b_2\left(1 + \frac{b_1}{b_2}t\right)}. \qquad (8)$$

Для визначення сталих b_1 та b_2 вибираємо такі початкові умови:

$$f(0) = -\frac{C_0}{C_1} \quad \text{та} \quad f'(0) = -\frac{C_0 k}{C_1},$$

де k - постійний коефіцієнт $(k > 0)$.

Підставляючи ці величини в (7) та (8), отримуємо

$$b_2 = -\frac{C_0}{C_1};\ b_1 = -\frac{C_0 k}{C_1}.$$

Із врахуванням цього визначальна функція та її похідна відповідно набувають вигляду

$$f(t) = -\frac{C_0}{C_1}\ln(1+kt);$$
$$f'(t) = -\frac{C_0}{C_1}\cdot\frac{k}{1+kt}. \qquad (9)$$

Використовуючи першу форму умов інтегровності (2), знаходимо

$$m(t) = \frac{C_0}{[f'(t)]^2} = \frac{C_1^2(1+kt)^2}{C_0 k^2}.$$

При цьому величини k та $\left(-\frac{C_0}{C_1}\right)$ є відомими.

Таким чином, вихідне неповне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами (3), що дозволяє інтегрування в квадратурах, приймає вигляд

$$C_1\left(\frac{C_1}{C_0}\right)\frac{(1+kt)^2}{k^2}\frac{d^2x}{dt^2} + C_2 x = 0. \qquad (10)$$

Або в іншій формі

$$C_0\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^2\frac{C_2k^2}{(1+kt)^2}x = 0. \qquad (11)$$

Нагадаємо, що у випадку повних інтегрованих вихідних рівнянь їх кількість відповідає всій множині визначальної функції $f(t)$, що задовольняє трьом вищезгаданим умовам [4]. Однак, для інтегрування неповного рівняння (3), в зв'язку з додатковою умовою ($\mu(t)=0$), використовується тільки одна визначальна функція $f(t)$, яка має вигляд (9). З цієї причини рівняння Матьє [2]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a + b\cos\omega t)x = 0,$$

яке завжди наводиться як приклад параметричних коливань, не було проінтегровано в квадратурах. В зв'язку з цим його аналіз завжди зводився тільки до визначення стійких та нестійких зон таких коливань.

Повернемось тепер до вихідного рівняння (10) або (11). Їх розв'язок у загальному випадку із врахуванням $f(t)$ з (9) приймає форму

$$x = K_1 e^{-r_1\frac{C_0}{C_1}\ln(1+kt)} + K_2 e^{-r_2\frac{C_0}{C_1}\ln(1+kt)}. \qquad (12)$$

У випадку комплексних коренів характеристичного рівняння $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ після перетворень розв'язок (12) матиме вигляд

$$x = a(1+kt)^{-\alpha\frac{C_0}{C_1}}\sin\left[\frac{C_0}{C_1}\beta\ln(1+kt) + \gamma\right]. \qquad (13)$$

З механічної точки зору це є закон коливального руху нестаціонарної системи зі змінними амплітудами та періодами коливань.

У випадку дійсних коренів характеристичного рівняння $r_1 = g_1$ та $r_2 = g_2$ розв'язок (12) приймає форму

$$x = K_1(1+kt)^{-g_1\frac{C_0}{C_1}} + K_2(1+kt)^{-g_2\frac{C_0}{C_1}}. \qquad (14)$$

Тобто ми маємо суму двох аперіодичних функцій.

Таким чином, у випадку малого опору, неповне лінійне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами є інтегрованим, якщо визначальна функція $f(t) = -\frac{C_0}{C_1}\ln(1+kt)$. Тоді при комплексних коренях характеристичного рівняння розв'язком є функція (13), яка описує нестаціонарні коливання. Якщо ж ці корені є дійсними, то розв'язком є аперіодична функція (14).

1. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 480 с.

2. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. / Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1979. – т.2. – 352 с.

3. *Каюк Я.Ф., Ахмедов А.* Пространственные движения цилиндрического тела переменной массы на упругом подвесе // Прикладная механика. – 1992. - №7. – с. 62-69.

4. *О.Кислий, Б.Дутчак, Т.Римарук* Види вихідних рівнянь параметричних коливань, які інтегруються в квадратурах // Машинознавство.-2005.-№7.-С.15-19.