УДК 539.375

В.М Садівський
Луцький національний технічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЩО ВИКЛИКАЮТЬ ЛОКАЛЬНЕ РУЙНУВАННЯ ПОБЛИЗУ ВЕРШИН ГОСТРОКІНЦЕВИХ ВКЛЮЧЕНЬ В ПЛАСТИНАХ

Розглядається ізотропна пластина, що містить пружне криволінійне включення з точками звороту на контурі і розтягується на нескінченності взаємно перпендикулярними монотонно зростаючими зусиллями. Визначаються зусилля, по досягненні яких в околі точки звороту утворюється тріщина. Оцінюється можливість застосування методів механіки руйнування до розрахунку крихкої міцності композицій, що складаються із матриці і гострокінцевого включення з іншими пружними властивостями.

Ключові слова: *включення, гострокінцевий виріз, гранична рівновага, композиція.*

Нехай ізотропна пластина містить криволінійне пружне включення з точками звороту на контурі і розтягується на нескінченності взаємно перпендикулярними монотонно зростаючими зусиллями N_1 і N_2, причому зусилля N_1 направлене під кутом α до осі Ox. (Початок системи координат співпадає з вершиною включення, вісь Ox направили так, щоб її від'ємна вітка проходила через геометричний центр включення). Задача полягає у визначенні зусиль $N_1 = N_1^*$, $N_2 = N_2^*$, по досягненні яких в околі точки звороту утворюється тріщина. Відмітимо, що досягненню граничної рівноваги пластин з тріщинами і жорсткими включеннями були присвячені роботи [1-3] і інші. Ми розглядаємо приклад пружного включення, граничними випадками якого є абсолютно гнучке включення (порожнистий виріз) і абсолютно жорстке включення. Припускаємо, що міцність включення і міцність контактного шару (границі розділу) між включенням і матрицею вище міцності матриці. Оціним можливість застосування методів механіки руйнування до розрахунку крихкої міцності композицій, що складається із матриці і гострокінцевого включення з іншими пружними властивостями.

Із розгляду напружень можна зробити висновок, що всі фізично можливі композиції $-1 \le d \le 1$ $\left(d = \left(G_2 - G_1\right) / \left(G_2 + G_1\right) \right)$ слід розділити на декілька класів, що визначаються нерівностями

$$-1 \le -d_1 < d_2 < -d_3 < 0 < d_4 < d_5 < d_6 \le 1.$$

Включення, що попали зовні інтервалу $\left(-d_1; d_6\right)$ віднесем до абсолютно жорстких або до порожнистих дефектів і будемо визначати їх міцність по відповідних формулах [2, 4]. Якщо компоненти σ_r, σ_θ розподілу напруженнь біля точки звороту пружного включення представити як

$$\sigma_r = \frac{A_r}{\sqrt{r}} + 0(1), \quad \sigma_\theta = \frac{A_\theta}{\sqrt{r}} + 0(1),$$

то для включень, що лежать в інтервалах $\left(-d_1, d_2\right)$, $\left(d_5, d_6\right)$ можна обмежитись розглядом тільки сингулярного члена у напруженнях, наприклад, $A_\theta \sqrt{r}$ для м'яких включень і $A_r / \sqrt{r}$ - для жорстких. При оцінці міцності композицій, що лежать в інтервалах $\left(-d_2, -d_3\right)$ і $\left(d_4, d_5\right)$ крім сингулярного члена слід враховувати ще і постійний член O(1) у напруженнях. Накінець, в інтервалі $\left(-d_3, d_4\right)$ коефіцієнти інтенсивності напружень біля гострокінцевих пружних включень дуже малі (основний вклад в напруження вносить постійний член O(1)) і тому класичні підходи лінійної механіки руйнування до розрахунку на міцність таких композицій взагалі не застосовні. Розглянемо більш детально клас включень, які попадають зовні інтервалу $\left(-d_2, d_5\right)$.

У [4,5] запропоновано критерій локального руйнування поблизу вершини тріщини, де припускалось, що початкова стадія руйнування відбувається біля вершини тріщини вздовж лінії, нормальні розтягуючі напруження до якої досягають максимально можливої інтенсивності. При цьому, як випливало із асимптотичних співвідношень для розподілу напружень поблизу вершини тріщини, дотичні напруження відсутні. Величина граничного навантаження визначалась із співвідношень

$$\lim_{r\to 0}\left\{\sqrt{r}\,\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\right\}_{\theta=\theta^*} \qquad (1)$$

$$\lim_{r\to 0}\left\{\sqrt{r}\sigma_\theta\left(\theta^*\right)\right\}=K_c, \qquad (2)$$

де K_c – опір матеріалу поширенню в ньому тріщини,

θ^* – кут, що визначає початковий напрямок поширення тріщини.

Оскільки для пружного включення також справедливий висновок, що витікає із відповідного розподілу напружень, що в напрямку максимальних нормальних напружень σ_θ дотичні напруження $\sigma_{r\theta}$ відсутні, то для знаходження граничного навантаження можливе застосування формул (1), (2). (Припускаємо, що у випадку м'яких включень головний вклад в руйнування вносить напруження σ_θ). Тоді, згідно основних положень механіки руйнування [4,6,7], критерій локального руйнування для м'яких включень можна записати так

$$A_\theta^{\max(l,\theta)}\left(\theta,N_1,N_2,G_1,G_2,V_1,V_2\right)=K_{0\theta},\quad \text{при } d\ge d_5 \qquad (3)$$

де $K_{0\theta}$ – постійна, що характеризує опір матеріалу зародженню в ньому тріщини у напрямку θ. Вираз $A_\theta^{\max(l,\theta)}\left(\theta,N_1,N_2,G_1,G_2,V_1,V_2\right)$ означає максимальне значення по кутах α і θ сингулярної частини напружень σ_θ в околі гострокінцевого включення.

Умову (3) запишемо так

$$N_1^*\tilde{A}_\theta^{\max(l,\theta)}\left(1,\varsigma,\theta,G_1,G_2,V_1,V_2\right)=K_{0\theta},\quad \text{при } d\ge d_5, \qquad (4)$$

$$(\varsigma=N_2^*/N_1^*).$$

Звідси знаходимо граничне навантаження необхідне для виникнення тріщини біля вершини включення

$$N_1^*=\frac{K_{0\theta}}{\tilde{A}_\theta^{\max(l,\theta)}\left(1,\varsigma,\theta,G_1,G_2,V_1,V_2\right)=K_{0\theta}},\ \text{при } d\ge d_5. \qquad (5)$$

Встановлено [1,2], що для пластин з абсолютно жорстким включенням головний вклад в руйнування вносить напруження σ_r. Припускаємо, що для розглядуваних пружних включень, пружні характеристики яких близькі до абсолютно жорсткого включення, справедливий такий самий висновок, тому для таких включень можна записати перетворення подібні (1)-(5) і знайти граничне навантаження для $d\le -d_2$.

Дані критеріальні співвідношення припускають, що в однорідному ізотропному матеріалі матриці на деякій віддалі від вершини включення (тобто у кільцевій області $r^*<r<r^{**}$, де виконуються асимптотичні вирази для пружного включення), виникає тріщина чи ряд тріщин нормального розриву. При цьому вкладом дотичних напружень $\sigma_{r\theta}$ нехтуємо. У випадку м'яких включень ця умова виконується автоматично.

Для оцінки граничного навантаження із зміною жорсткості композиції нами обчислювалось граничне навантаження для одностороннього розтягу пластини. Із результатів обчислень випливає, що включення, для яких відношення модулів зсуву $G_2/G_1>60$ можна віднести до порожнистих дефектів і користуватись виразами коефіцієнтів інтенсивності і асимптотичного розподілу напружень для гострокінцевих виразів. Аналогічно клас включень для яких $G_2/G_1<0,02$ віднесемо до абсолютно жорстких включень і будемо користуватися відповідними формулами механіки руйнування. В зв'язку з тим, що критеріальні співвідношення типу (3)-(5) записані для всіх форм дефектів даного класу, то, очевидно, дані висновки справедливі для заповнених тріщин різної конфігурації.

Руйнування сучасних високоміцних матеріалів в більшості випадків є крихким, тобто руйнування відбувається шляхом поширення тріщини. Основну роль у процесі, що передує руйнуванню, грає напружено-деформований стан в околі кутової точки (вершини) тріщини. Поле напружень, що виникає в зоні вершини тріщини в однорідному ізотропному тілі, може бути виражене через зовнішнє навантаження, конфігурацію тіла і форму тріщини. Розрахунок міцності анізотропних тіл з тріщинами за співвідношеннями механіки руйнування для ізотропного тіла в більшості випадків дає результати з великими похибками. В наявних оглядах по механіці руйнування руйнуванню анізотропних тіл з тріщинами присвячені окремі абзаци, хоч такі дослідження представляють значний науковий і практичний інтерес в зв'язку із зростаючим застосуванням анізотропних матеріалів у різних галузях господарства. Для наступного наближення розрахункової моделі до реальної у випадку матеріалів, що мають анізотропію пружних властивостей, розв'язувались задачі механіки руйнування для анізотропних тіл з тріщинами. При цьому використовувались методи теорії пружності анізотропного тіла. Задача про прямолінійну тріщину-розріз в анізотропному середовищі вперше була розглянута Стро з допомогою енергетичного підходу. Вираховувалась енергія, зв'язана із утворенням тріщини, досліджувалось поле напружень біля вершини тріщини. Однак, внаслідок складності запропонованого підходу, автору не вдалось отримати кінцевий розв'язок задачі в явному вигляді. Енг і Вільямс досліджували циліндричний згин і розтяг ортотропної пластини з тріщиною, розміщеною вздовж одного із головних напрямків пружності матеріалу. Зроблені висновки про вплив ортотропії матеріалу на розподіл напружень в області вершини тріщини.

Відмітимо, що отримані вирази для напружень мають досить громіздкий вигляд і спрощуються тільки для площадок, нормалі до яких співпадають з осями центральної системи координат. Г.І.Баренблат і Г.П.Черепанов розглядали задачу про рівновагу ізольованої прямолінійної тріщини, що співпадає з осями пружної симетрії в ортотропному тілі. Досліджувалось також розклинювання тріщини тонким абсолютно жорстким безконечним клином із врахуванням сил кулонового тертя. Зроблено важливий висновок про те, що модуль зчеплення (в'язкість руйнування) ортотропного тіла залежить від орієнтації тріщини відносно головних напрямків пружності. Е.П.Фельдман вивчав питання про поширення тонкої півбезконечної тріщини, паралельної границям анізотропної смуги кінцевої ширини при зростанні зовнішнього навантаження, прикладеного до берегів тріщини. Показано, що при постійному збільшенні зовнішнього навантаження тріщина видовжується до деякого критичного значення, після чого відбувається миттєвий розрив смуги. Д.І.Грілицький, Р.М.Луцишин досліджували пружну рівновагу анізотропної пластини із впаяною круговою ізотропною шайбою і дугоподібною тріщиною-розрізом на лінії спаю під дією розтягуючих зусиль у безконечно віддалених точках пластини. Детально розглянуто випадок ортотропної пластини з абсолютно жорсткою круговою шайбою і розрізом вздовж лінії спаю.

Розглядається також задача про граничну рівновагу анізотропної пластини, ослабленої початково розкритою тріщиною. Пластина перебуває під дією розтягу монотонно зростаючим навантаженням на нескінченності. Матеріал пластини в кожній точці має три взаємно перпендикулярних площини пружної і міцністної симетрії. Знаходиться граничне навантаження, що викликає початковий ріст тріщини, а також напрямки початкового поширення тріщини.

Для оптимального використання ортотропних матеріалів у конструкціях необхідно мати методи оцінки несучої здатності елементів цих конструкцій із врахуванням ортотропії і дефектності матеріалу, оскільки звичайні методи розрахунку, що використовуються при оцінці міцності твердих тіл, в багатьох випадках виявляються грубими і незастосовними для аналізу і розрахунку суттєво ортотропних високоміцних структур. Анізотропію механічних властивостей матеріалу необхідно також врахувати при розрахунку несучої здатності виробів, виготовлених шляхом механічної обробки матеріалу (пресуванням, штампуванням, і. т. д) і деталей, що мають конструктивну анізотропію.

Розглянемо задачу про визначення граничної рівноваги анізотропної пластини, що містить розкриту тріщину довжини $2l$ і підлягає дії монотонно зростаючого навантаження на нескінченності. Обмежимося класом матеріалів, що мають у кожній точці три взаємно перпендикулярних площини пружної і міцнісної симетрії.

Для знаходження граничного навантаження, що викликає локальне руйнування ортотропної пластини з тріщиною, використаємо представлення (1,2), попередньо перетворивши їх у відповідності із руйнуванням ортотропних матеріалів. В принципі, ці критеріальні співвідношення також можна було б рекомендувати для оцінки початку поширення тріщини, що міститься в анізотропній пластині. Однак тут задача ускладнюється тим, що для значної більшості анізотропних матеріалів права частина умови (2) залежить від кута β між заданим напрямком і напрямком мінімального опору матеріалу поширенню в ньому тріщини. Для матеріалів із пружною і міцнісною ортотропією кут початкового напрямку поширення тріщини і граничне навантаження визначаємо із співвідношень

$$\lim_{r\to 0}\left\{\sqrt{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sigma_\theta\left(r,\theta,\varphi,l\right)}{K\left(\beta\right)}\right]\right\}=0\,, \tag{6}$$

$$\lim_{r\to 0}\left[\sqrt{r}\sigma_\theta\left(r,\theta,\varphi,l\right)\right]=K\left(\beta^*\right), \tag{7}$$

$$\left(\beta^*=\theta^*+\varphi\right),$$

де α – кут нахилу зовнішнього навантаження до осі локальної системи координат; φ –кут нахилу тріщини до напрямку мінімального опору матеріалу тріщини (в нашому випадку він співпадає із напрямком максимальної жорсткості матеріалу). Слідуючи [3], ортотропні матеріали можна розділити на три групи за характером залежності модуля пружності і границі міцності від вибраного напрямку відносно головних осей матеріалу:

1) з випуклою кривою, 2) з монотонно спадаючою кривою, 3) із ввігнутою кривою.

На основі аналізу залежності границі міцності від орієнтації відносно головних осей пружності вираз для опору матеріалу поширенню тріщини представили так

$$K\left(\beta\right)=K\left(0^{\circ}\right)\left[\cos^4\beta+\left(\frac{K\left(45^{\circ}\right)}{K\left(0^{\circ}\right)}-\frac{1}{4}-\frac{K\left(90^{\circ}\right)}{4K\left(0^{\circ}\right)}\right)\sin^2\beta\cos^2\beta+\frac{K\left(90^{\circ}\right)}{K\left(0^{\circ}\right)}\sin^4\beta\right]. \tag{8}$$

Для матеріалів другої групи у роботах [4, 5] запропонований вираз

$$K\left(\beta\right)=K\left(0^{\circ}\right)\sqrt{1-\sin^2\beta\left[1-\frac{K\left(90^{\circ}\right)}{K\left(0^{\circ}\right)}\right]}\,, \tag{9}$$

Де $K\left(0^{\circ}\right)$, $K\left(45^{\circ}\right)$, $K\left(90^{\circ}\right)$ – опір матеріалу поширенню тріщини (визначається із експерименту), при кутах $\beta=0^{\circ},45^{\circ},90^{\circ}$.

Відмітимо, що характер запропонованої залежності опору сильно анізотропного матеріалу поширенню в ньому тріщини від кута β (співвідношення (8)) дає краще узгодження із наявними експериментальними даними, ніж (9). Деяким його недоліком є необхідність визначення трьох експериментальних величин $K\left(0^{\circ}\right)$, $K\left(45^{\circ}\right)$, $K\left(90^{\circ}\right)$ в порівнянні із двома $K\left(0^{\circ}\right)$, $K\left(90^{\circ}\right)$ у (9). Кінцевий вигляд функції K(β) повинен визначатись відповідними експериментальними результатами. На даному етапі, коли вивчення залежності K від β тільки починається, співвідношення типу (8), (9) можуть служити лише для якісної оцінки міцності розглядуваного класу анізотропних конструкційних матеріалів.

Із (7) можна визначити граничне навантаження, необхідне для того, щоб привести тріщину у стан граничної рівноваги. Для визначення границь, в яких можлива заміна анізотропної лівої частини (7) на ізотропну, а також для можливості заміни правої частини (7) постійною величиною, нами проведені обчислення у випадках, коли:

а) матеріал пластини анізотропний по пружних і міцнісних властивостях;

б) матеріал пластини анізотропний по пружних властивостях і анізотропний по міцнісних;

в) матеріал пластини анізотропний по пружних і ізотропний по міцнісних властивостях.

Із результатів обчислень випливає, що для ортотропних матеріалів при $\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\le 2$ симетрична частина напруження σ_θ досягає максимального значення при $\theta=0^{\circ}$. Із результатів обчислень по співвідношенню (8) можна зробити висновок, що для близьких між собою значень $K(45^{\circ})$ і $K(0^{\circ})$, (тобто для сильно ортотропних матеріалів) існує проміжок кута β, для якого вираз K(β) практично постійний і тоді обчислення за виразами (1), (2) значно спрощується. Встановлено, що при $\sqrt{\dfrac{E_x}{E_y}} > 4$ вираз для σ_θ у лівій частині (6), (7) повинен братись по анізотропних формулах, оскільки ізотропне значення σ_θ приводить до значних похибок.

Із обчислень граничного навантаження зроблено висновок, що при розтязі пластин перпендикулярно лінії, що проходить через вершини мало розкритої тріщини, незалежно від орієнтації тріщини відносно головних напрямків пружності матеріалу, тріщину можна вважати математичним розрізом нульового розкриття. При розтязі пластини під кутом до розкритої тріщини необхідно користуватись більш повним розв'язком, що враховує вплив анізотропії матеріалу і конфігурацію дефекту. Відмітимо, що вирази (6),(7) не враховують вклад дотичних напружень у розвиток руйнування, оскільки в напрямку, що визначається в (7) в анізотропній пластині з тріщиною, на відміну від ізотропної пластини, діє дотичне напруження.

1. Бережницкий Л.Т., Труш И.И К построению критерия хрупкого разрушения горных пород при двухосном напряженном состоянии. «Термические методы разрушения горных пород», Киев, «Наукова думка», 1972, 2, с. 89-92.
2. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И. «О локальном разрушении хрупкого тела с остроконечными жесткими включениями». Проблемы прочности, 1973, 10, с. 8-11.
3. Каминский А.А. «Определение критических нагрузок, вызывающих развитие расширенных трещин». Прикладная механика, 1966, 2, 11, с.63-67.
4. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка». 1968, 246 с.
5. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений. «Физико-химическая механика материалов, 1968, с. 10-15.
6. Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения. «Журнал прикладной математики и технической физики», 1967, 6,с. 88-128.
7. Партон В.З., Морозов Е.И. «Механика упруго-пластического разрушения», Москва, «Наука», 1974, 416 с.