УДК.539.3

Л.Г.Грінченко
Луцький національний технічний університет

ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН ТОНКОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛИТИ, ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ НА КОНТУРІ

В роботі розглянутий згин тонкої ізотропної прямокутної плити, з певними граничними умовами. Через базові функції і функції форми визначені: функція прогину, кути поворотів нормалей. Проведено числові розрахунки розподілу, прогину та згинних моментів в головних перерізах плити.

Ключові слова : *ізотропна прямокутна плита, функція прогину, точки колокаціі, згинальні моменти, кути поворотів нормалей.*

Розглянемо тонку прямокутну ізотропну плиту з розмірами в плані $2a_j$ $(j = 1,2)$ і товщиною h жорстко закріплену на контурі і завантажену на верхній поверхні сталим навантаженням $q(x_1, x_2) = q_0$. Згин такої пластини описується диференціальним рівнянням четвертого порядку:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q_0}{D}; \tag{1}$$

Тут $w(x_1,x_2)$ – прогин плити; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - її циліндрична жорсткість; де E і ν відповідно модуль Юнга і коефіцієнт Пуасона матеріалу плити. Моменти M_{11}, M_{22} в плиті визначаються за формулами:

$$M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \qquad M_{22} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) \tag{2}$$

через функцію прогину w (x_1, x_2).

Для розрахунку напружено-деформованого стану плити необхідно знати функцію прогину w (x_1, x_2). Знаходимо її з розв'язку диференціального рівняння (1), задовільнивши при цьому відповідні граничні умови.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1) шукаємо у вигляді суми

$$w = w_0 + w_* \tag{3}$$

загального розв'язку w_0 однорідного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0 \tag{4}$$

і часткового розв'язку w_* неоднорідного диференціального рівняння (1). Цей розв'язок вибираємо у вигляді:

$$w_* = \frac{q_0\,(x_1^2 - a_1^2)\cdot(x_2^2 - a_2^2)}{8D}. \tag{5}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (4) шукаємо у вигляді (5):

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k^{[1]}(x_1)\cos\delta_k^{[2]}\,x_2 + f_k^{[2]}(x_2)\cos\delta_k^{[1]}\,x_1\right] \tag{6}$$

Підставивши вираз (6) до рівняння (4) після розділення змінних приходимо до системи двох незв'язних диференціальних рівнянь

$$f_k^{[j](IV)}(x_j) - 2\delta_k^{[3-j]^{(2)}} f_k^{[j]''}(x_j) + \delta_k^{[3-j]^4} f_k^{[j]}(x_j) = 0\,,\ j\text{=}1,\,2 \tag{7}$$

на невідомі функції $f_k^{[j]}(x_j)$. Часткові розв'язки даної системи вибираємо у вигляді

$$f_k^{[j]}(x_j) = R_k^{[j]*}\exp(\lambda_k^{[j]} x_j), \tag{8}$$

де $R_k^{[j]*}, \lambda_k^{[j]}$ невідомі параметри.

Підставляючи ці розв'язки до рівнянь (7) отримуємо характеристичні рівняння на параметри $\lambda_k^{[j]}$:

$$\lambda_k^{[j]^4} - 2\delta_k^{[3-j]^2} \cdot \lambda_k^{[j]^2} + \delta_k^{[3-j]^4} = 0\,. \tag{9}$$

Корені

$$\lambda_{(1,2)k}^{[j]} = \delta_k^{[3-j]}; \qquad \lambda_{(3,4)k}^{[j]} = -\,\delta_k^{[3-j]} \tag{10}$$

цих рівнянь є кратні, тому загальний розв'язок однорідного рівняння (4) набуває вигляду:

$$\begin{gathered} w_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{ \Big[R_{1(k)}^{[1]*} \exp\left(\delta_k^{[2]} x_1\right) + R_{2(k)}^{[1]*} x_1 \exp\left(\delta_k^{[2]} x_1\right) \Big]\cos\left(\delta_k^{[2]} x_2\right) + \\ + \Big[R_{1(k)}^{[2]*} \exp\left(\delta_k^{[1]} x_2\right) + R_{2(k)}^{[2]*} x_2 \exp\left(\delta_k^{[1]} x_2\right)\Big]\cos\left(\delta_k^{[1]} x_1\right) \Big\} \end{gathered} \tag{11}$$

Оскільки розглядувана задача є симетричною то прогин плити повинен бути парною функцією змінних x_1, x_2. Представимо його у вигляді:

$$\begin{gathered} w_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big[R_{1(k)}^{[1]*} ch\left(\delta_k^{[2]} x_1\right) + R_{2(k)}^{[1]*} x_1 sh\left(\delta_k^{[2]} x_1\right) \Big]\cos\left(\delta_k^{[2]} x_2\right) + \\ + \Big[R_{1(k)}^{[2]*} ch\left(\delta_k^{[1]} x_2\right) + R_{2(k)}^{[2]*} x_2 sh\left(\delta_k^{[1]} x_2\right)\Big]\cos\left(\delta_k^{[1]} x_1\right) \Big\} \end{gathered} \tag{12}$$

При збільшенні кількості наближень k експоненціальні функції суттєво зростають. Тому для кращої можливості проведення числових розрахунків розв'язок (12), нормуємо представивши його у вигляді (6):

$$\begin{gathered} w_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big[\widetilde{R}_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]}\left(x_1\right) + \widetilde{R}_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]}\left(x_1\right)\Big] C_k^{[2]}(x_2) + \\ + \Big[\widetilde{R}_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}\left(x_2\right) + \widetilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}\left(x_2\right)\Big] \cdot C_k^{[1]}(x_1)\Big\}, \end{gathered} \tag{13}$$

де

$$\Phi_{1(k)}^{[j]}\left(x_j\right) = \frac{ch(\delta_k^{[3-j]} x_j)}{\exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)}; \qquad \Phi_{2(k)}^{[j]}\left(x_j\right) = \frac{x_j}{a_j} \cdot \frac{sh(\delta_k^{[3-j]} x_j)}{\exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)} \tag{14}$$

$$\widetilde{R}_{1(k)}^{[j]} = R_{1(k)}^{[j]*} \exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)\,; \; \widetilde{R}_{2(k)}^{[j]} = R_{2(k)}^{[j]*} \cdot a_j \exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)\,;$$

$$C_k^{[j]}(x_j) = \cos(\delta_k^{[j]} x_j); \quad \delta_k^{[j]} = \frac{(2k-1)\pi}{2a_j}; \quad \delta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}\,. \tag{15}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) отримуємо за формулою (3), враховуючи співвідношення (5), (13). Подамо його в безрозмірних величинах

$$\begin{gathered} w = \frac{q_0 a_1^4}{D}\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big[R_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]}\left(x_1\right) + R_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]}\left(x_1\right)\Big] C_k^{[2]}(x_2) + \\ + \Big[R_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}\left(x_2\right) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}\left(x_2\right)\Big] C_k^{[1]}(x_1)\Big\} + \frac{\left(x_1^2/a_1^2 - 1\right)\left(x_2^2/a_2^2 - 1\right)a_2^2}{8a_1^2}\Bigg] \end{gathered} \tag{16}$$

Диференціюючи функцію прогину $w\left(x_1, x_2\right)$ по змінних x_1, x_2 отримуємо вирази на кути поворотів нормалей до серединної поверхні плити після деформації

$$\begin{gathered} \varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{q_0 a_1^4}{D}\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\Big[R_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]\,\prime}\left(x_1\right) + R_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]\,\prime}\left(x_1\right)\Big] C_k^{[2]}(x_2) + \\ + \Big[R_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}\left(x_2\right) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}\left(x_2\right)\Big] C_k^{[1]\,\prime}(x_1)\Big\} + \frac{a_2^2}{4a_1^4}\left(\frac{x_2^2}{a_2^2} - 1\right) \cdot x_1\Bigg]; \end{gathered} \tag{17}$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{q_0 a_1^4}{D}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]}\Phi_{1(k)}^{[1]}(x_1) + R_{2(k)}^{[1]}\Phi_{2(k)}^{[1]}(x_1)\right]C_k^{[2]\prime}(x_2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[R_{1(k)}^{[2]}\Phi_{1(k)}^{[2]\prime}(x_2) + R_{2(k)}^{[2]}\cdot\Phi_{2(k)}^{[2]\prime}(x_2)\right]C_k^{[1]}(x_1)\right\} + \frac{1}{4a_1^2}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} - 1\right)\cdot x_2\right]. \qquad (18)$$

На невідомі сталі $x_j = \pm a_j$ маємо граничні умови:

$$w\Big|_{x_i = a_i} = 0; \quad \varphi_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}\Big|_{x_i = a_i} = 0; \qquad (19)$$

де $\varphi_i(x_i)$ кут повороту грані $x_i = a_i$.

Для зручності обчислень запишемо отримані співвідношення в безрозмірних змінних $\xi_j = x_j / a_j \ (-1 \le \xi_j \le 1)$

$$w = \frac{q_0 a_1^4}{D}\left[\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]}\cdot\varPhi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + R_{2(k)}^{[1]}\cdot\varPhi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1)\right]\cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right.\right. \qquad (21)$$
$$\left.\left. + \left[R_{1(k)}^{[2]}\cdot\varPhi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + R_{2(k)}^{[2]}\cdot\varPhi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2)\right]\cdot C_k^{[1]}(\xi_1)\right\} + \frac{a_2^2(\xi_1^2 - 1)(\xi_2^2 - 1)}{8a_1^2}\right];$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \left(\frac{q_0 a_1^4}{D}\right)\left[\frac{1}{a_1}\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]}\cdot\varPhi_{1(k)}^{[1]\prime}(\xi_1) + R_{2(k)}^{[1]}\cdot\varPhi_{2(k)}^{[1]\prime}(\xi_1)\right]\cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[R_{1(k)}^{[2]}\cdot\varPhi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + R_{2(k)}^{[2]}\cdot\varPhi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2)\right]\cdot C_k^{[1]\prime}(\xi_1)\right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2}(\xi_2^2 - 1)2\xi_1\cdot\frac{1}{a_1}\right];$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = \left(\frac{q_0 a_1^4}{D}\right)\left[\frac{1}{a_2}\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]}\cdot\varPhi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + R_{2(k)}^{[1]}\cdot\varPhi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1)\right]\cdot C_k^{[2]\prime}(\xi_2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[R_{1(k)}^{[2]}\cdot\varPhi_{1(k)}^{[2]\prime}(\xi_2) + R_{2(k)}^{[2]}\cdot\varPhi_{2(k)}^{[2]\prime}(\xi_2)\right]\cdot C_k^{[1]}(\xi_1)\right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2}(\xi_1^2 - 1)2\xi_2\cdot\frac{1}{a_2}\right];$$

де:

$$R_{1(k)}^{[j]} = \frac{\widetilde{R}_{1(k)}^{[j]}}{\left(\frac{q_0 a_1^4}{D}\right)}; \quad R_{2(k)}^{[j]} = \frac{\widetilde{R}_{2(k)}^{[j]}}{\left(\frac{q_0 a_1^4}{D}\right)};$$

$$\varPhi_{1(k)}^{[j]}(\xi_j) = \frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_j)\right] + \frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}\cdot(1+\xi_j)\right];$$

$$\varPhi_{2(k)}^{[j]}(\xi_j) = \frac{1}{2}\xi_j\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_j)\right] - \frac{1}{2}\cdot\xi_j\cdot\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}\cdot(1+\xi_j)\right];$$

$$\varPhi_{1(k)}^{[j]\prime}(\xi_j) = \frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_1)\right]\cdot\delta_k\frac{a_j}{a_{3-j}} - \frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1+\xi_j)\right]\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}; \qquad (20)$$

$$\Phi_{2(k)}^{[j]\,\prime}(\xi_j)=\frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_j)\right]+\frac{1}{2}\xi_j\cdot\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_j)\right]\delta_k\frac{a_j}{a_{3-j}}-$$
$$-\frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1+\xi_j)\right]+\frac{1}{2}\xi_j\exp\left[-\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}}(1+\xi_j)\right]\cdot\delta_k\cdot\frac{a_j}{a_{3-j}};$$

Підставляючи вирази (17), (18), (20) до граничних умов

$$w\Big|_{\xi_1=1}=0;\qquad \varphi_1=\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{\xi_1=1}=0;$$
$$w\Big|_{\xi_2=1}=0;\qquad \varphi_2=\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big|_{\xi_2=1}=0; \tag{23}$$

і враховуючи, що $C_k^{[1]}(1)=C_k^{[2]}(1)=0$ отримуємо систему $2k+2$ алгебраїчних рівнянь на невідомі коефіцієнти $\tilde{R}_{\upsilon(k)}^{[j]}$, $\upsilon=1,2$

$$R_{1(k)}^{[1]}\cdot\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)+R_{2(k)}^{[1]}\cdot\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)=0;$$
$$R_{1(k)}^{[2]}\cdot\Phi_{1(k)}^{[2]}(1)+R_{2(k)}^{[2]}\cdot\Phi_{2(k)}^{[2]}(1)=0;$$
$$\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]}\cdot\Phi_{1(k)}^{[1]\,\prime}(1)+R_{2(k)}^{[1]}\cdot\Phi_{2(k)}^{[1]\,\prime}(1)\right]\cdot C_k^{[2]}(\xi_2)+\right.$$
$$\left.+\left[R_{1(k)}^{[2]}\cdot\Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2)+R_{2(k)}^{[2]}\cdot\Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2)\right]\cdot C_k^{[1]\,\prime}(1)\right\}+\frac{a_2^2}{4a_1^2}(\xi_2^2-1)=0; \tag{24}$$
$$\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]}\cdot\Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1)+R_{2(k)}^{[1]}\cdot\Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1)\right]\cdot C_k^{[2]\,\prime}(1)+\right.$$
$$\left.+\left[R_{1(k)}^{[2]}\cdot\Phi_{1(k)}^{[2]\,\prime}(1)+R_{2(k)}^{[2]}\cdot\Phi_{2(k)}^{[2]\,\prime}(1)\right]\cdot C_k^{[1]}(\xi_1)\right\}+\frac{a_2^2}{4a_1^2}(\xi_1^2-1)=0; \tag{22}$$

З перших $2k$ рівнянь системи (24) знаходимо:

$$R_{2(k)}^{[j]}=-\frac{\Phi_{1(k)}^{[j]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[j]}(1)}R_{1(k)}^{[j]}; \tag{25}$$

Підставляючи ці зв'язки до інших двох рівнянь даної системи отримуємо систему двох рівнянь зі змінними коефіцієнтами на визначення невідомих коефіцієнтів $R_{1(k)}^{[1]}, R_{2(k)}^{[2]}$

$$\sum_{k=1}^{K}\left\{R_{1(k)}^{[1]}\left[\Phi_{1(k)}^{[1]\,\prime}(1)-\frac{\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)}\Phi_{2(k)}^{[1]\,\prime}(1)\right]\cdot C_k^{[2]}(\xi_2)+\right.$$
$$\left.+R_{1(k)}^{[2]}\left[\Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2)-\frac{\Phi_{1(k)}^{[2]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[2]}(1)}\Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2)\right]\cdot C_k^{[1]\,\prime}(1)\right\}+\frac{a_2^2}{4a_1^2}(\xi_2^2-1)=0; \tag{26}$$
$$\sum_{k=1}^{K}\left\{R_{1(k)}^{[1]}\left[\Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1)-\frac{\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)}\Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1)\right]\cdot C_k^{[2]\,\prime}(1)+\right.$$
$$\left.+R_{1(k)}^{[2]}\left[\Phi_{1(k)}^{[2]\,\prime}(1)-\frac{\Phi_{1(k)}^{[2]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[2]}(1)}\cdot\Phi_{2(k)}^{[2]\,\prime}(1)\right]\cdot C_k^{[1]}(\xi_1)\right\}+\frac{a_2^2}{4a_1^2}(\xi_1^2-1)=0; \tag{27}$$

Систему рівнянь (26), (27) розв'язуємо методом колокацій. Для цього проміжок $\xi_1 \in [0;1]$ та $\xi_2 \in [0;1]$ розбиваємо на ряд інтервалів довжиною $\frac{1}{K}$ і записуємо цю систему рівнянь для кожної точки: $\xi_1 = 0;\ \xi_1 = \frac{1}{K};\ \xi_1 = \frac{2}{K};\ldots,\xi_1 = \frac{K-1}{K}$ та $\xi_2 = 0;\ \xi_2 = \frac{1}{K};\ \xi_2 = \frac{2}{K};\ldots,\xi_2 = \frac{K-1}{K}$.

Кількість точок колокацій (параметр К) вибираємо так, щоб досягти заданої точності задоволення системи рівнянь (26), (27).

Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь були використані прямі методи. Метод виключення Гауса був реалізований в наступному варіанті. Припустимо що $a_{11} \neq 0$, перше рівняння системи $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = a_{i,m+1}$, $i = 1,\ldots,m$ ділимо на коефіцієнт a_{11}, в результаті отримуємо рівняння $x_1 + \sum_{j=2}^{m} a_{1j}^1 x_j = a_{1,m+1}^1$ Далі з кожного з рівнянь що залишилися віднімають перше рівняння домножене на відповідний коефіцієнт a_{i1} В результаті ці рівняння перетворюються до вигляду $\sum_{j=2}^{m} a_{ij}^1 x_j = a_{i,m+1}^1$, $i = 2,\ldots,m.$ Перше невідоме виявилося виключеним з усіх рівнянь, крім першого. Далі припускаючи, що $a_{22}^1 \neq 0$, ділимо друге рівняння на коєфіцієнт a_{22}^1 і виключаемо невідоме x_2 з усіх рівнянь починаючи з другого і т.д. В результаті послідовного виключення невідомих система рівнянь перетворюється в систему рівнянь з трикутною матрицею $x_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}^i x_j = a_{i,m+1}^i$, $i = 1,\ldots,m.$ З $m-$го рівняння останньої системи визначаемо x_m із $(m-1)-$го рівняння визначаємо x_{m-1} і т д до x_1. Обмеженням методу є припущення що всі ведучі елементи, на які відбувається ділення, на кожному кроці виключення відмінні від нуля. Недолік методу в тому що якщо ведучій елемент не дорівнює нулю але є близьким до нього то в процесі обчислень може виникати сильне накопичення похибок. Вихід з цієї ситуації може бути в тому, що в якості ведучого елемента вибирають інше число. Найбільш послідовно така стратегія вибору ведучих елементів відбувається в методі головних елементів. Його відмінність від вищеописаної схеми методу Гауса в слідуючому. Нехай по ходу виключення невідомих отримана система рівнянь $x_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}^i x_j = a_{i,m+1}^i$, $i = 1,\ldots,k$, $\sum_{j=k+1}^{m} a_{ij}^k x_j = a_{i,m+1}^k$, $i = k+1,\ldots,m.$ Відшукаємо l таке, щоб $\left|a_{k+1,l}^k\right| = \max_j \left|a_{k+1,j}^k\right|$ і перепозначимо $x_{k+1} = x_l$ і $x_l = x_{k+1}$, далі проведемо виключення невідомої x_{k+1} із всіх рівнянь починаючи з $(k+2)-$го. Таке перепозначання приводить до зміни порядку виключення невідомих і в багатьох випадках суттєво зменшує чутливість розв'язку до похибок заокруглення при обчисленнях. Результати обчислень за цими методами розміщені в таблиці 1.

В рахунках покладено $\nu = 0{,}3$. Точність задоволення граничних умов перевіряли за максимальним відхиленням від нуля лівих частин рівнянь (26), (27) при відомих уже коефіцієнтах $R_{\upsilon(k)}^{[j]}$, табулюючи їх як функції від ξ_1, ξ_2 з кроком $H = 0.01$. В результаті табуляції встановлено, що для десяти точок колокацій $(K = 10)$ максимальне відхилення від нуля за абсолютною величиною на всьому інтервалі $\xi_j \in [-1;1]$ у випадку, коли відношення сторін плити задовільняє умові: $\frac{a_1}{a_2} = 0.5;\ 0.6;\ 0.7;\ 0.8;\ 0.9;\ 1.0$ для рівняння (26) не перевищує $9.551644 \cdot 10^{-5}$, для рівняння (27) не перевищує $4.864484 \cdot 10^{-5}$. У випадку відношення $\frac{a_1}{a_2} = 1.11;\ 1.25;\ 1.43;\ 1.67;\ 2.00$ максимальне відхилення від нуля за абсолютною величиною для рівняння (26) не перевищує

$4.856289 \cdot 10^{-5}$, для рівняння (27) не перевищує $9.549409 \cdot 10^{-5}$, тобто точність задоволення граничних умов є достатньо висока.

Знаючи параметри $R_{\nu(k)}^{[j]}$ визначаємо прогин $w(x_1, x_2)$ в кожній точці плити, а маючи функцію прогину за формулами (2) легко знаходимо моменти в плиті.

Запишемо вирази для кривин волокон через які визначаються згинні моменти в плиті

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \left(\frac{q_0 a_1^4}{D}\right)\left[\frac{1}{a_1^2}\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]} \cdot {\Phi_{1(k)}^{[1]}}''(\xi_1) + R_{2(k)}^{[1]} \cdot {\Phi_{2(k)}^{[1]}}''(\xi_1)\right] \cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[R_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2)\right] \cdot {C_k^{[1]}}''(\xi_1)\right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2}(\xi_2^2 - 1)2 \cdot \frac{1}{a_1^2}\right];$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \left(\frac{q_0 a_1^4}{D}\right)\left[\frac{1}{a_2^2}\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[R_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + R_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1)\right] \cdot {C_k^{[2]}}''(\xi_2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[R_{1(k)}^{[2]} \cdot {\Phi_{1(k)}^{[2]}}''(\xi_2) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot {\Phi_{2(k)}^{[2]}}''(\xi_2)\right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1)\right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2}(\xi_1^2 - 1)2 \cdot \frac{1}{a_2^2}\right]; \quad (28)$$

де

$${\Phi_{1(k)}^{[j]}}''(\xi_j) = \frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_j)\right] \cdot (\delta_k)^2 \cdot \left(\frac{a_j}{a_{3-j}}\right)^2 + \frac{1}{2}\exp\left[-\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}}(1+\xi_j)\right](\delta_k)^2 \cdot \left(\frac{a_j}{a_{3-j}}\right)^2;$$

$${\Phi_{2(k)}^{[j]}}''(\xi_j) = \exp\left[-\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_j)\right]\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} + \frac{1}{2}\xi_j \cdot \exp\left[-\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}}(1-\xi_j)\right](\delta_k)^2 \cdot \left(\frac{a_j}{a_{3-j}}\right)^2 +$$
$$+ \exp\left[-\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}}(1+\xi_j)\right] \cdot \delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} - \frac{1}{2}\xi_j \exp\left[-\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}}(1+\xi_j)\right] \cdot (\delta_k)^2 \cdot \left(\frac{a_j}{a_{3-j}}\right)^2;$$

Проведені числові розрахунки розподілу прогину та згинних моментів в головних перерізах $(\xi_j = 0)$ плити.

1. Тимошенко С.П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки.-М.: Наука, 1966.- 635с.
2. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. -Киев: Наукова думка, 1979.- 400с.
3. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. -Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.- 256 с.
4. Kączkowski Z. Płyty. Obliczenia statyczne.- Warszawa: Arkady, 1980.
5. Делявский М.В. Расчет напряженного состояния в толстой ортотропной плите под действием изгибающей нагрузки // Пробл. прочности .- № 11-12.- С. 117-123.
6. Delyavskyy M., Gołaś J., Podhorecka A.: O pewnym podejściu do rozwiązywania płyt wielowarstwowych, XLV Konf. Nauk. Krynica 99, s.63-70.