

УДК 519.9

П.І.Гінайло

Луцький національний технічний університет

### НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ДЛЯ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

В работе рассмотрена задача оптимального управления для гармонического осциллятора с переменной жесткостью. Получен закон, при котором энергия достигает заданной величины за минимальное время.

Ключові слова: екстремум, осцилятор.

Розглядається рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{x} + f(t)x = 0$$

із змінною жорсткістю  $f(t)$ . Потрібно розв'язати задачу оптимального керування

$$t_1 \rightarrow \inf$$

$$\ddot{x} + (1 - \varepsilon u)x = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x^2(t_1) + \dot{x}^2(t_1) = 1$$

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В нашому випадку жорсткість  $f(t)$  може змінюватися в межах  $1 - \varepsilon \leq f \leq 1$ . У не збудженому стані, коли  $u = 0$ ,  $f = 1$ , то енергія осцилятора заключається у відшуканні закону збудження жорсткості осцилятора, при якому його енергія досягнула б заданої величини за мінімальний час.

Зведемо нашу задачу до стандартної задачі оптимального керування, поклавши  $\dot{x} = y$

$$t_1 \rightarrow \inf$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(1 - \varepsilon u)x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x^2(t_1) + \dot{x}^2(t_1) = 1$$

$$0 \leq u \leq 1.$$

Застосуємо принцип Понтрягіна у формі Гамільтона. Функція  $H$  має вигляд

$$H = py - q(1 - \varepsilon u)x,$$

а отже, спряжена система буде мати вигляд

$$\dot{p} = (1 - \varepsilon u)q, \quad \dot{q} = -p.$$

Для імпульсів  $p$  і  $q$  виконуються умови трансверсальності

$$p(t_1) = -\mu x(t_1), \quad q(t_1) = -\mu y(t_1)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} + (1 - \varepsilon u)q &= 0 \\ q(t_1) = -\mu \dot{x}(t_1), \quad \dot{p}(t_1) &= \mu x(t_1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Бачимо, що функції  $x(t)$  і  $q(t)$  задовільняють одному і тому ж рівнянню. Для оптимального керування принцип максимуму дає такий вираз

$$u(t) = \begin{cases} 1, & qx > 0 \\ 0, & qx < 0, \end{cases} \quad (2)$$

або  $u(t) = \theta(qx)$ , де  $\theta(\lambda)$  - функція Хевісайда. Знайдемо єдиний розв'язок вказаних співвідношень. Очевидно  $\mu \neq 0$  бо інакше із (1) ми отримали б  $q \equiv 0$ , а це означає, що  $p \equiv \dot{q} \equiv 0$ , а це не можливо в силу принципу максимуму. Отже, можемо вважати, що  $\mu = 1$ .

Тепер можемо бачити, що  $u(t_1 - 0) = 1$ , інакше енергія  $\varepsilon$  досягала б за час менший ніж  $t_1$  (якщо  $u \equiv 0$ , то енергія не змінюється). Тоді із (1) і (2) отримуємо

$$0 < q(t_1)x(t_1) = -x(t_1)\mathcal{E}(t_1).$$

Отже, точка  $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  лежить у другій або четвертій четвертях фазової площини. В не збудженому стані (коли  $u = 0$ ) точки  $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  і  $(q(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  здійснюють рух по колах у фазовій площині, а у збудженому стані - по еліпсах  $x^2 + \frac{\mathcal{E}^2}{1-\varepsilon} = a$  за годинниковою стрілкою.

Принцип максимуму дає такий вираз для оптимального керування:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } qx > 0 \\ 0, & \text{якщо } qx < 0 \end{cases}$$

або  $u(t) = \theta(qx)$ , де  $\theta(\lambda)$  - функція Хевісайда.

Знайдемо єдиний розв'язок вказаних співвідношень.

Явно бачимо, що  $\mu \neq 0$ , тому що інакше ми отримали б  $q \equiv 0$ , а значить і  $p \equiv \mathcal{E} \equiv 0$ , чого не може бути в силу принципу максимуму. Отже, можна вважати  $\mu = 1$ .

Тепер бачимо, що  $u(t_1 - 0) = 1$ , бо інакше енергія  $E$  досягалася б за час менший ніж  $t$  (якщо  $u = 0$ , то енергія не змінюється). Значить отримуємо, що

$$0 < q(t_1)x(t_1) = -x(t_1)\mathcal{E}(t_1).$$

Таким чином, точка  $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  лежить у другій або четвертій четвертях фазової площини. Для визначеності припустимо, що вектор  $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  лежить в четвертій четверті:

$$x(t_1) = \cos \alpha$$

$$\mathcal{E}(t_1) = \sin \alpha$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

Тоді, оскільки  $\mu = 1$ , маємо

$$q(t_1) = -\mathcal{E}(t_1) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{E}(t_1) = x(t_1) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Виходить, що вектор  $(q(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  повернутий відносно вектора  $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  на кут  $\frac{\pi}{2}$  проти часової стрілки.

Задача розв'язується, коли наша система залишається у збудженому стані ще деякий час, поки  $x$  не стане рівний нулю. Позначимо цей момент через  $T > t_1$ . Точка розміщена на вертикальній осі. Нехай в цей момент часу  $T$  вектор  $(q(T), \mathcal{E}(T))$  прийняв положення

$$q(T) = \rho \cos \omega,$$

$$\mathcal{E}(T) = \rho \sin \omega,$$

$$\omega = \omega(\alpha).$$

Спочатку (при  $T - t < \beta$ ) осцилятор збуджений, а значить і точка  $(x, \mathcal{E})$ , і точка  $(q, \mathcal{E})$  здійснюють рух по еліпсах. Першим вертикальної осі досягає вектор  $(q, \mathcal{E})$ , а вектор  $(x, \mathcal{E})$  до цього моменту буде утворювати з віссю  $x$  кут, рівний  $(-1)\omega(\alpha)$ . В цей момент відбулось останнє переключення, до якого жорсткість дорівнювала 1, а значить обидва вектори здійснили рівномірний круговий рух. При цьому обертанні першим досягає вертикальної осі вектор  $(x, \mathcal{E})$  і це буде момент передостаннього переключення. В цей момент вектор  $(q, \mathcal{E})$  буде утворювати з

горизонтальною віссю кут  $\omega(\alpha) + \pi$  і т.д. При своєму русі жорсткість переключается тоді і тільки тоді, коли фазова траєкторія перетинає або вертикальну вісь (і тоді жорсткість міняється з  $1 - \varepsilon$  на 1), або пряму  $\mathcal{E} = (-tg\omega(\alpha))x$  (і тоді жорсткість міняється з 1 на  $1 - \varepsilon$ ).

Залишається обчислити криву  $\omega(\alpha)$ .

Біля точки  $t = t_1$  функція  $x(t)$  має вид

$$x(t) = A \cos(\sqrt{1-\varepsilon}(t-t_1) + \gamma),$$

звідки, користуючись рівностями  $x(t_1) = \cos \alpha$ ,  $\mathcal{E}(t_1) = \sin \alpha$ , отримуємо

$$A = \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \cos^2 \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \sin \gamma = -\frac{\sin \alpha}{A\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \cos \gamma = \frac{\cos \alpha}{A}.$$

Біля точки  $t = t_1$  функція  $q(t)$  має вигляд

$$q(t) = B \cos(\sqrt{1-\varepsilon}(t-t_1) + \delta).$$

Враховуючи рівності  $q(t_1) = -\sin \alpha$ ,  $\mathcal{E}(t_1) = \cos \alpha$ , маємо

$$B = \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \sin^2 \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \sin \delta = -\frac{\cos \alpha}{B\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \cos \delta = -\frac{\sin \alpha}{B}.$$

Момент часу  $t_2$ , коли відбувається останнє переключення, визначається із умови  $q(t_2) = 0$ ,  $\mathcal{E}(t_2) > 0$ , тобто

$$\sqrt{1-\varepsilon}(t_2-t_1) + \delta = -\frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$x(t_2) = A \sin(\gamma - \delta) = \frac{1}{B\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon} \sin^2 \alpha}$$

$$\mathcal{E}(t_2) = A\sqrt{1-\varepsilon} \cos(\gamma - \delta) = \frac{\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha}{B\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon} \sin^2 \alpha}.$$

Ці формули визначають точку останнього переключення в залежності від  $\alpha$ , тобто від положення фазової точки в момент часу  $t_1$ .

При зміні  $\alpha$  від 0 до  $-\frac{\pi}{2}$  точка  $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$  описує на фазовій площині криву  $l$ , кінці якої лежать на осі абсцис. Тоді з останніх формул знаходимо

$$tg\omega(\alpha) = -\frac{\mathcal{E}(t_2)}{x(t_2)} = -\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha.$$

Провівши порівняння точного і наближеного розв'язків, позначивши  $\frac{\mathcal{E}}{x} = tgy$ , отримаємо, що оптимальний розв'язок задається так:

$$u = \theta(-tg\omega(\alpha) - tgy) = \theta(\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha - tgy).$$

1. Пшеничний Б.П. Необходимые условия экстремума./ М. Наука.-1969.