

УДК 519.9

П.І.Гінайло

Луцький національний технічний університет

НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ДЛЯ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

В работе рассмотрена задача оптимального управления для гармонического осциллятора с переменной жесткостью. Получен закон, при котором энергия достигает заданной величины за минимальное время.

Ключові слова: екстремум, осцилятор.

Розглядається рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{x} + f(t)x = 0$$

із змінною жорсткістю $f(t)$. Потрібно розв'язати задачу оптимального керування

$$t_1 \rightarrow \inf$$

$$\ddot{x} + (1 - \varepsilon u)x = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x^2(t_1) + \dot{x}^2(t_1) = 1$$

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В нашому випадку жорсткість $f(t)$ може змінюватися в межах $1 - \varepsilon \leq f \leq 1$. У не збудженому стані, коли $u = 0$, $f = 1$, то енергія осцилятора заключається у відшуканні закону збудження жорсткості осцилятора, при якому його енергія досягнула б заданої величини за мінімальний час.

Зведемо нашу задачу до стандартної задачі оптимального керування, поклавши $\dot{x} = y$

$$t_1 \rightarrow \inf$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(1 - \varepsilon u)x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x^2(t_1) + \dot{x}^2(t_1) = 1$$

$$0 \leq u \leq 1.$$

Застосуємо принцип Понтрягіна у формі Гамільтона. Функція H має вигляд

$$H = py - q(1 - \varepsilon u)x,$$

а отже, спряжена система буде мати вигляд

$$\dot{p} = (1 - \varepsilon u)q, \quad \dot{q} = -p.$$

Для імпульсів p і q виконуються умови трансверсальності

$$p(t_1) = -\mu x(t_1), \quad q(t_1) = -\mu y(t_1)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} + (1 - \varepsilon u)q &= 0 \\ q(t_1) = -\mu y(t_1), \quad \dot{q}(t_1) &= \mu x(t_1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Бачимо, що функції $x(t)$ і $q(t)$ задовільняють одному і тому ж рівнянню. Для оптимального керування принцип максимуму дає такий вираз

$$u(t) = \begin{cases} 1, & qx > 0 \\ 0, & qx < 0, \end{cases} \quad (2)$$

або $u(t) = \theta(qx)$, де $\theta(\lambda)$ - функція Хевісайда. Знайдемо єдиний розв'язок вказаних співвідношень. Очевидно $\mu \neq 0$ бо інакше із (1) ми отримали б $q \equiv 0$, а це означає, що $p \equiv q \equiv 0$, а це не можливо в силу принципу максимуму. Отже, можемо вважати, що $\mu = 1$.

Тепер можемо бачити, що $u(t_1 - 0) = 1$, інакше енергія ε досягала б за час менший ніж t_1 (якщо $u \equiv 0$, то енергія не змінюється). Тоді із (1) і (2) отримуємо

$$0 < q(t_1)x(t_1) = -x(t_1)\mathcal{E}(t_1).$$

Отже, точка $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$ лежить у другій або четвертій четвертях фазової площини. В не збудженому стані (коли $u = 0$) точки $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$ і $(q(t_1), \mathcal{E}(t_1))$ здійснюють рух по колах у фазовій площині, а у збудженому стані - по еліпсах $x^2 + \frac{\mathcal{E}^2}{1-\varepsilon} = a$ за годинниковою стрілкою.

Принцип максимуму дає такий вираз для оптимального керування:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } qx > 0 \\ 0, & \text{якщо } qx < 0 \end{cases}$$

або $u(t) = \theta(qx)$, де $\theta(\lambda)$ - функція Хевісайда.

Знайдемо єдиний розв'язок вказаних співвідношень.

Явно бачимо, що $\mu \neq 0$, тому що інакше ми отримали б $q \equiv 0$, а значить і $p \equiv \mathcal{E} \equiv 0$, чого не може бути в силу принципу максимуму. Отже, можна вважати $\mu = 1$.

Тепер бачимо, що $u(t_1 - 0) = 1$, бо інакше енергія E досягалася б за час менший ніж t (якщо $u = 0$, то енергія не змінюється). Значить отримуємо, що

$$0 < q(t_1)x(t_1) = -x(t_1)\mathcal{E}(t_1).$$

Таким чином, точка $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$ лежить у другій або четвертій четвертях фазової площини. Для визначеності припустимо, що вектор $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$ лежить в четвертій четверті:

$$x(t_1) = \cos \alpha$$

$$\mathcal{E}(t_1) = \sin \alpha$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

Тоді, оскільки $\mu = 1$, маємо

$$q(t_1) = -\mathcal{E}(t_1) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{E}(t_1) = x(t_1) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Виходить, що вектор $(q(t_1), \mathcal{E}(t_1))$ повернутий відносно вектора $(x(t_1), \mathcal{E}(t_1))$ на кут $\frac{\pi}{2}$ проти часової стрілки.

Задача розв'язується, коли наша система залишається у збудженому стані ще деякий час, поки x не стане рівний нулю. Позначимо цей момент через $T > t_1$. Точка розміщена на вертикальній осі. Нехай в цей момент часу T вектор $(q(T), \mathcal{E}(T))$ прийняв положення

$$q(T) = \rho \cos \omega,$$

$$\mathcal{E}(T) = \rho \sin \omega,$$

$$\omega = \omega(\alpha).$$

Спочатку (при $T - t < \beta$) осцилятор збуджений, а значить і точка (x, \mathcal{E}) , і точка (q, \mathcal{E}) здійснюють рух по еліпсах. Першим вертикальної осі досягає вектор (q, \mathcal{E}) , а вектор (x, \mathcal{E}) до цього моменту буде утворювати з віссю x кут, рівний $(-1)\omega(\alpha)$. В цей момент відбулось останнє переключення, до якого жорсткість дорівнювала 1, а значить обидва вектори здійснили рівномірний круговий рух. При цьому обертанні першим досягає вертикальної осі вектор (x, \mathcal{E}) і це буде момент передостаннього переключення. В цей момент вектор (q, \mathcal{E}) буде утворювати з

горизонтальною віссю кут $\omega(\alpha) + \pi$ і т.д. При своєму русі жорсткість переключасться тоді і тільки тоді, коли фазова траєкторія перетинає або вертикальну вісь (і тоді жорсткість міняється з $1 - \varepsilon$ на 1), або пряму $\mathcal{X} = (-tg\omega(\alpha))x$ (і тоді жорсткість міняється з 1 на $1 - \varepsilon$).

Залишається обчислити криву $\omega(\alpha)$.

Біля точки $t = t_1$ функція $x(t)$ має вид

$$x(t) = A \cos(\sqrt{1-\varepsilon}(t-t_1) + \gamma),$$

звідки, користуючись рівностями $x(t_1) = \cos \alpha$, $\mathcal{X}(t_1) = \sin \alpha$, отримуємо

$$A = \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \cos^2 \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \sin \gamma = -\frac{\sin \alpha}{A\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \cos \gamma = \frac{\cos \alpha}{A}.$$

Біля точки $t = t_1$ функція $q(t)$ має вигляд

$$q(t) = B \cos(\sqrt{1-\varepsilon}(t-t_1) + \delta).$$

Враховуючи рівності $q(t_1) = -\sin \alpha$, $\mathcal{X}(t_1) = \cos \alpha$, маємо

$$B = \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \sin^2 \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \sin \delta = -\frac{\cos \alpha}{B\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \cos \delta = -\frac{\sin \alpha}{B}.$$

Момент часу t_2 , коли відбувається останнє переключення, визначається із умови $q(t_2) = 0$, $\mathcal{X}(t_2) > 0$, тобто

$$\sqrt{1-\varepsilon}(t_2-t_1) + \delta = -\frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$x(t_2) = A \sin(\gamma - \delta) = \frac{1}{B\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon} \sin^2 \alpha}$$

$$\mathcal{X}(t_2) = A\sqrt{1-\varepsilon} \cos(\gamma - \delta) = \frac{\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha}{B\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon} \sin^2 \alpha}.$$

Ці формули визначають точку останнього переключення в залежності від α , тобто від положення фазової точки в момент часу t_1 .

При зміні α від 0 до $-\frac{\pi}{2}$ точка $(x(t_1), \mathcal{X}(t_1))$ описує на фазовій площині криву l , кінці якої лежать на осі абсцис. Тоді з останніх формул знаходимо

$$tg \omega(\alpha) = -\frac{\mathcal{X}(t_2)}{x(t_2)} = -\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha.$$

Провівши порівняння точного і наближеного розв'язків, позначивши $\frac{\mathcal{X}}{x} = tgy$, отримаємо, що оптимальний розв'язок задається так:

$$u = \theta(-tg \omega(\alpha) - tgy) = \theta(\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha - tgy).$$

1. Пшеничний Б.П. Необходимые условия экстремума./ М. Наука.-1969.