УДК 519.9
П.І.Гінайло
Луцький національний технічний університет

НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ДЛЯ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

В работе рассмотрена задача оптимального управления для гармонического осциллятора с переменной жосткостью. Получен закон, при котором энергия достигает заданной величины за минимальное время.

Ключові слова: *екстремум, осцилятор.*

Розглядається рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{x} + f(t)x = 0$$

із змінною жорсткістю $f(t)$. Потрібно розв’язати задачу оптимального керування

$$t_1 \to \inf$$
$$\ddot{x} + (1-\varepsilon u)x = 0$$
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x^2(t_1) + \dot{x}^2(t_1) = 1$$
$$0 \le u \le 1, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В нашому випадку жорсткість $f(t)$ може змінюватися в межах $1-\varepsilon \le f \le 1$. У не збудженому стані, коли $u = 0, \quad f = 1$, то енергія осцилятора заключається у відшуканні закону збудження жорсткості осцилятора, при якому його енергія досягнула б заданої величини за мінімальний час.

Зведемо нашу задачу до стандартної задачі оптимального керування, поклавши $\dot{x} = y$

$$t_1 \to \inf$$
$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = -(1-\varepsilon u)x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad x^2(t_1) + \dot{x}^2(t_1) = 1$$
$$0 \le u \le 1.$$

Застосуємо принцип Понтрягіна у формі Гамільтона. Функція H має вигляд

$$H = py - q(1-\varepsilon u)x,$$

а отже, спряжена система буде мати вигляд

$$\dot{p} = (1-\varepsilon u)q, \quad \dot{q} = -p.$$

Для імпульсів p і q виконуються умови трансверсальності

$$p(t_1) = -\mu x(t_1), \quad q(t_1) = -\mu y(t_1)$$

або

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{q} + (1-\varepsilon u)q = 0 \\ &q(t_1) = -\mu\dot{x}(t_1), \quad \dot{q}(t_1) = \mu x(t_1) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Бачимо, що функції $x(t)$ і $q(t)$ задовільняють одному і тому ж рівнянню. Для оптимального керування принцип максимуму дає такий вираз

$$u(t) = \begin{cases} 1, & qx > 0 \\ 0, & qx < 0, \end{cases} \qquad (2)$$

або $u(t) = \theta(qx)$, де $\theta(\lambda)$ - функція Хевісайда. Знайдемо єдиний розв’язок вказаних співвідношень. Очевидно $\mu \ne 0$ бо інакше із (1) ми отримали б $q \equiv 0$, а це означає, що $p \equiv q \equiv 0$, а це не можливо в силу принципу максимуму. Отже, можемо вважати, що $\mu = 1$.

Тепер можемо бачити, що $u(t_1 - 0) = 1$, інакше енергія ε досягалась би за час менший ніж t_1 (якщо $u \equiv 0$, то енергія не змінюється). Тоді із (1) і (2) отримуємо

$$0 < q(t_1)\,x(t_1) = -x(t_1)\,\dot{x}(t_1).$$

Отже, точка $\left(x(t_1), \dot{x}(t_1)\right)$ лежить у другій або четвертій четвертях фазової площини. В не збудженому стані (коли $u = 0$) точки $\left(x(t_1), \dot{x}(t_1)\right)$ і $\left(q(t_1), \dot{q}(t_1)\right)$ здійснюють рух по колах у фазовій площині, а у збудженому стані - по еліпсах $x^2 + \dfrac{\dot{x}^2}{1-\varepsilon} = a$ за годинниковою стрілкою.

Принцип максимуму дає такий вираз для оптимального керування:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } qx > 0 \\ 0, & \text{якщо } qx < 0 \end{cases}$$

або $u(t) = \theta(qx)$, де $\theta(\lambda)$ - функція Хевісайда.

Знайдемо єдиний розв'язок вказаних співвідношень.

Явно бачимо, що $\mu \neq 0$, тому що інакше ми отримали б $q \equiv 0$, а значить і $p \equiv \dot{q} \equiv 0$, чого не може бути в силу принципу максимуму. Отже, можна вважати $\mu = 1$.

Тепер бачимо, що $u(t_1 - 0) = 1$, бо інакше енергія E досягалася б за час менший ніж t (якщо $u = 0$, то енергія не змінюється). Значить отримуємо, що

$$0 < q(t_1)\,x(t_1) = -x(t_1)\,\dot{x}(t_1).$$

Таким чином, точка $\left(x(t_1), \dot{x}(t_1)\right)$ лежить у другій або четвертій четвертях фазової площини. Для визначеності припустимо, що вектор $\left(x(t_1), \dot{x}(t_1)\right)$ лежить в четвертій четверті:

$$x(t_1) = \cos\alpha$$

$$\dot{x}(t_1) = \sin\alpha$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

Тоді, оскільки $\mu = 1$, маємо

$$q(t_1) = -\dot{x}(t_1) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dot{q}(t_1) = x(t_1) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Виходить, що вектор $\left(q(t_1), \dot{q}(t_1)\right)$ повернутий відносно вектора $\left(x(t_1), \dot{x}(t_1)\right)$ на кут $\dfrac{\pi}{2}$ проти часової стрілки.

Задача розв'язується, коли наша система залишається у збудженому стані ще деякий час, поки x не стане рівний нулю. Позначимо цей момент через $T > t_1$. Точка розміщена на вертикальній осі. Нехай в цей момент часу T вектор $\left(q(T), \dot{q}(T)\right)$ прийняв положення

$$q(T) = \rho\cos\omega,$$

$$\dot{q}(T) = \rho\sin\omega,$$

$$\omega = \omega(\alpha).$$

Спочатку (при $T - t < \beta$) осцилятор збуджений, а значить і точка $(x, \dot{x})$, і точка $(q, \dot{q})$ здійснюють рух по еліпсах. Першим вертикальної осі досягає вектор $(q, \dot{q})$, а вектор $(x, \dot{x})$ до цього моменту буде утворювати з віссю x кут, рівний $(-1)\omega(\alpha)$. В цей момент відбулось останнє переключення, до якого жорсткість дорівнювала 1, а значить обидва вектори здійснили рівномірний круговий рух. При цьому обертанні першим досягає вертикальної осі вектор $(x, \dot{x})$ і це буде момент передостаннього переключення. В цей момент вектор $(q, \dot{q})$ буде утворювати з горизонтальною віссю кут $\omega(\alpha)+\pi$ і т.д. При своєму русі жорсткість переключається тоді і тільки тоді, коли фазова траєкторія перетинає або вертикальну вісь (і тоді жорсткість міняється з $1-\varepsilon$ на 1), або пряму $\dot{x}=\left(-tg\omega(\alpha)\right)x$ (і тоді жорсткість міняється з 1 на $1-\varepsilon$).

Залишається обчислити криву $\omega(\alpha)$.

Біля точки $t=t_1$ функція $x(t)$ має вид

$$x(t)=A\cos\left(\sqrt{1-\varepsilon}\,(t-t_1)+\gamma\right),$$

звідки, користуючись рівностями $x(t_1)=\cos\alpha$, $\dot{x}(t_1)=\sin\alpha$, отримуємо

$$A=\frac{\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\varepsilon}},\qquad \sin\gamma=-\frac{\sin\alpha}{A\sqrt{1-\varepsilon}},\qquad \cos\gamma=\frac{\cos\alpha}{A}.$$

Біля точки $t=t_1$ функція $q(t)$ має вигляд

$$q(t)=B\cos\left(\sqrt{1-\varepsilon}\,(t-t_1)+\delta\right).$$

Враховуючи рівності $q(t_1)=-\sin\alpha$, $\dot{q}(t_1)=\cos\alpha$, маємо

$$B=\frac{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\varepsilon}},\qquad \sin\delta=-\frac{\cos\alpha}{B\sqrt{1-\varepsilon}},\qquad \cos\gamma=-\frac{\sin\alpha}{B}.$$

Момент часу t_2, коли відбувається останнє переключення, визначається із умови $q(t_2)=0$, $\dot{q}(t_2)>0$, тобто

$$\sqrt{1-\varepsilon}\,(t_2-t_1)+\delta=-\frac{\pi}{2}.$$

Тоді $$x(t_2)=A\sin(\gamma-\delta)=\frac{1}{B\sqrt{1-\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2\alpha}}$$

$$\dot{x}(t_2)=A\sqrt{1-\varepsilon}\cos(\gamma-\delta)=\frac{\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha}{B\sqrt{1-\varepsilon}}=\frac{\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2\alpha}}.$$

Ці формули визначають точку останнього переключення в залежності від α, тобто від положення фазової точки в момент часу t_1.

При зміні α від 0 до $-\frac{\pi}{2}$ точка $\left(x(t_1),\dot{x}(t_1)\right)$ описує на фазовій площині криву l, кінці якої лежать на осі абсцис. Тоді з останніх формул знаходимо

$$tg\omega(\alpha)=-\frac{\dot{x}(t_2)}{x(t_2)}=-\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha.$$

Провівши порівняння точного і наближеного розв'язків, позначивши $\frac{\dot{x}}{x}=tgy$, отримаємо, що оптимальний розв'язок задається так:

$$u=\theta\left(-tg\omega(\alpha)-tgy\right)=\theta\left(\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha-tgy\right).$$

1. Пшеничний Б.П. Необходимые условия экстремума./ М. Наука.–1969.