

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО ТІЛА ТА СИСТЕМИ ШТАМПІВ ІЗ УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ

*Комп'ютерне моделювання плоскої контактної взаємодії пружного тіла та системи штампів із урахуванням тертя. Сформульовано загальну постановку плоскої контактної задачі теорії пружності для тіл складної форми, що взаємодіють із системою жорстких штампів. Побудовано умови контакту та методику їх розв'язування для випадку, коли сумарні розміри областей, які перебувають у контакті, є значно меншими порівняно з областями, де контакт відсутній. Досліджено контактну взаємодію періодичних штампів з півплощиною та контуром отвору кругової форми. На основі цих розрахунків знайдено зв'язок між розподілами напружень під штампамі періодичної та відповідної гладкої форм. Проведено наближене моделювання контактної взаємодії системи роликів штампів з внутрішньою поверхнею зовнішнього кільця у радіальному роликівому підшипнику при вертикальному навантаженні з врахуванням сил тертя.*

*Ключові слова: Плоска контактна задача, пружне тіло, система жорстких штампів, шорсткість, радіальний роликівий підшипник, чисельний алгоритм.*

**Вступ.** Розв'язування плоских контактних задач теорії пружності для тіл складної форми найчастіше зводиться до розгляду нелінійних інтегральних рівнянь [3, 4]. Зазначимо, що ці рівняння є нелінійними із-за невизначеної області контакту, яка в свою чергу може складатися з довільної кількості ділянок, межі яких є невідомими. До такого класу задач належать досить актуальні на даний час задачі, в яких, крім складних форм штампів, потрібно ще й враховувати їх шорсткість або шорсткість основи, на яку вони тиснуть. Вплив хвилястості в контактних задачах досліджено в [1-3]. Розв'язування задач такого класу в літературі проводилося різними методами (в основному числовими): Б.А. Галанов зводив такі задачі до системи рівнянь Гамерштейна, А. Сінйоріні вперше представив контактну задачу як варіаційну з обмеженнями у вигляді нерівностей. Далі цей підхід розвинуто в роботах [2-4, 6]. Аналітичними методами досліджувались контактні задачі з незаданими ділянками контакту в роботах [1, 5].

**Загальна постановка задачі.** Нехай задано систему  $m$  жорстких штампів, межі яких опишемо функціями  $f^1(x, y) = 0, \dots, f^m(x, y) = 0$ . Вважатимемо, що рівняння межі тіла в області контакту має вигляд  $g(x, y) = 0$ . Покладемо, що до кожного штампів прикладені сили, головні вектори та моменти яких відповідно дорівнюють  $(P_x^1, P_y^1), \dots, (P_x^m, P_y^m)$  і  $M^1, \dots, M^m$ . Будемо розглядати також випадок, коли до тіла прикладені зосереджені сили  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .

**Умови контакту.** Для запису умов контакту врахуємо те, що після деформування граничні точки пружного тіла, що знаходяться в області контакту, для кожного  $j$ -го штампів будуть задовольняти рівнянню границі штампів з врахуванням його зміщення в напрямках координатних осей  $Ox$  та  $Oy$  відповідно на деякі відстані  $D_x^j$  та  $D_y^j$  та його повороту на деякий кут  $\theta^j$ . Тобто рівняння штампів після відповідних зміщень та повороту матимуть вигляд

$$f^j(\xi + \eta\theta^j + D_x^j, -\xi\theta^j + \eta + D_y^j) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad (1)$$

де  $\xi = x + u + U_p$ ,  $\eta = y + v + V_p$ , де  $(u, v)$  – сумарні переміщення, зумовлені дією всіх штампів,  $(U_p, V_p)$  – сумарні переміщення, зумовлені дією всіх зосереджених сил. Всі переміщення разом з величинами  $D_x^j$ ,  $D_y^j$  та  $\theta^j$  будемо вважати малими. Після підстановки значення  $\xi$  та  $\eta$  в (1), одержимо умову контакту у вигляді

$$f^j(x + u(x, y) + U_p(x, y) + (y + v(x, y) + V_p(x, y))\theta^j + D_x^j, -(x + u(x, y) + U_p(x, y))\theta^j + y + v(x, y) + V_p(x, y) + D_y^j) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Нехай рівняння контуру параметризовано –  $x = g_1(\alpha)$ ,  $y = g_2(\alpha)$ , де  $\alpha$  - параметр. Тоді умову (2) можна переписати у вигляді

$$f_1^j(\alpha) \vartheta(\alpha) + f_2^j(\alpha) \varphi(\alpha) = -f_3^j(\alpha) - f_1^j(\alpha) U_P^0(\alpha) - f_2^j(\alpha) V_P^0(\alpha) - D_x^j f_1^j(\alpha) - D_y^j f_2^j(\alpha) + \theta^j f_3^j(\alpha) + \delta^j(\alpha), \quad j = \overline{1, m}; \quad (3)$$

де  $f_3^j(\alpha) = f^j(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $f_1^j(\alpha) = f_x^j(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $f_2^j(\alpha) = f_y^j(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $f_3^j(\alpha) = g_1(\alpha) \cdot f_2^j(\alpha) - g_2(\alpha) \cdot f_1^j(\alpha)$ ;  $\vartheta(\alpha) = u(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $\varphi(\alpha) = v(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $U_P^0(\alpha) = U_P(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $V_P^0(\alpha) = V_P(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ;  $\delta^j(\alpha) = o(\vartheta\varphi)$  – додатковий член, який має другий порядок малості відносно переміщень.

**Визначення переміщень** ( $u, v$ ). Прийmemo, що відомим є фундаментальний розв'язок, тобто відомими є переміщення в будь-якій точці границі заданого пружного тіла, спричинені дією довільних зосереджених сил. Тоді переміщення межі цього тіла можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \vartheta(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{11}(\alpha, \xi) d\xi + \int_{\Omega} \tau(\xi) K_{12}(\alpha, \xi) d\xi + const, \\ \varphi(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{21}(\alpha, \xi) d\xi + \int_{\Omega} \tau(\xi) K_{22}(\alpha, \xi) d\xi + const; \end{cases} \quad (4)$$

де  $\sigma$  – нормальні контактні напруження,  $\tau$  – відповідні дотичні контактні напруження; функції  $K_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$  визначаються за допомогою фундаментального розв'язку;  $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$ ,  $\Omega_k$  – область зміни параметру, яка відповідає  $k$ -ій ділянці контакту.

Прийmemo, що має місце закон Кулона-Амонтона  $\tau = \rho\sigma$ , де  $\rho$  – коефіцієнт тертя. Тоді співвідношення (4) можна буде переписати у вигляді

$$\begin{cases} \vartheta(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{\#0}(\alpha, \xi) d\xi, \\ \varphi(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) K_{\#0}(\alpha, \xi) d\xi; \end{cases} \quad (5)$$

де  $K_{\#0}(\alpha, \xi) = K_{11}(\alpha, \xi) + \rho K_{12}(\alpha, \xi)$ ,  $K_{\#0}(\alpha, \xi) = K_{21}(\alpha, \xi) + \rho K_{22}(\alpha, \xi)$ .

**Побудова інтегральних рівнянь та додаткових рівностей.** Після підстановки співвідношень (5) у умову контакту (3) при нехтуванні величинами  $\delta^j$  одержимо лінеаризовані умови контакту у вигляді інтегральних рівнянь

$$\int_{\Omega} \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi = F^j(\alpha) - D_x^j f_1^j(\alpha) - D_y^j f_2^j(\alpha) + \theta^j f_3^j(\alpha), \quad j = \overline{1, m}; \quad (6)$$

де  $J^j(\alpha, \xi) = f_1^j(\alpha) K_{\#0}(\alpha, \xi) + f_2^j(\alpha) K_{\#0}(\alpha, \xi)$ ,  $F^j(\alpha) = -f_3^j(\alpha) - f_1^j(\alpha) U_P^0(\alpha) - f_2^j(\alpha) V_P^0(\alpha)$ .

Для знаходження  $3m$  невідомих  $D_x^j$ ,  $D_y^j$ ,  $\theta^j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , систему інтегральних рівнянь (6) доповнимо додатковими  $3m$  рівностями, які побудуємо з умов рівноваги штампів

$$\begin{cases} \int_{\Omega^j} \sigma(\xi) \cos\left(\hat{n}, \hat{x}\right) ds = P_x^j, \quad \int_{\Omega^j} \sigma(\xi) \cos\left(\hat{n}, \hat{y}\right) ds = P_y^j, \\ \int_{\Omega^j} \sigma(\xi) \cos\left(\hat{n}, \hat{x}\right) y ds = M^j, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

**Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей і числового алгоритму її розв'язування.** Умови контакту (6) є нелінійними інтегральними рівняннями, оскільки наперед є невідомою область контакту (вона може складатися з великої і наперед невизначеної кількості ділянок). Для розв'язування такої задачі використаємо підхід Сінйоріні. Ввівши в розгляд сукупність прогнозованих областей  $D^j$ , що покривають області  $\Omega^j$ , і загальну прогнозовану область  $D$ , що покриває область  $\Omega$ , побудуємо альтернативну систему інтегральних рівнянь та нерівностей у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi + D_x^j f_1^j(\alpha) + D_y^j f_2^j(\alpha) - \theta^j f_3^j(\alpha) = F^j(\alpha), \sigma(\alpha) < 0, \\ \int_D \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi + D_x^j f_1^j(\alpha) + D_y^j f_2^j(\alpha) - \theta^j f_3^j(\alpha) \leq F^j(\alpha), \sigma(\alpha) = 0, \\ \int_{D^j} \sigma(\xi) \cos\left(\hat{n}, \hat{x}\right) ds = P_x^j, \int_{D^j} \sigma(\xi) \cos\left(\hat{n}, \hat{y}\right) ds = P_y^j, \\ \int_{D^j} \sigma(\xi) \cos\left(\hat{n}, \hat{x}\right) y ds = M^j, j = \overline{1, m}; \end{array} \right. \quad (7)$$

де  $D = \bigcup_{k=1}^m D^k$ ,  $D^j$  – прогнозована область, що включає в себе область контакту  $\Omega^j$ . Тут

знехтувано величинами  $\delta^j$  та прийнято на кожній множині  $D^j$ , що  $\sigma(\xi) = 0$  при  $\xi \notin \Omega^j$ .

Далі як і в [3, 4] побудуємо числовий алгоритм розв'язування задачі (7). Суть цього алгоритму полягає в тому, що спочатку за допомогою методу механічних квадратур система інтегральних рівнянь та нерівностей (7) перетворюється у систему лінійних рівнянь та нерівностей відносно невідомих контактних напружень у вузлових точках, що покривають прогнозовану область контакту. Розв'язування цієї системи зводиться до відповідної задачі квадратичного програмування (ЗКП) [4].

**Модифікація побудованого алгоритму.** Наведений алгоритм дає змогу знаходити такі розподіли контактних напружень, що область контакту в них може складатися з декількох довільним чином розташованих ділянок. Досить часто в таких задачах сумарний розмір ділянок, в яких контакт відсутній, значно більший за розмір ділянок контакту. Для цього випадку модифікуємо алгоритм [2-4] так, щоб зменшити кількість вузлових точок і тим самим зменшити розмірність відповідної ЗКП. Ітеративний алгоритм розв'язування цієї задачі зводиться до наступного. Спочатку розв'яжемо відповідну задачу для вибраної кількості вузлових точок, що покривають рівномірно всю прогнозовану область контакту. Далі на основі знайденого розв'язку, знайдемо межі всіх ділянок прогнозованого контакту (у першому наближенні). На наступному кроці вузлові точки з невідомими контактними напруженнями вибираємо тільки на знайдених ділянках. При цьому за рахунок згущення вузлових точок підвищується точність розрахунків.

Альтернативна система лінійних рівнянь та нерівностей запишеться у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} = F_v \quad \forall \delta \sigma_v < 0, \\ \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} \leq F_v \quad \forall \delta \sigma_v = 0, \\ \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^1 \sigma_n = P, \quad \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^2 \sigma_n = M, \quad v = n'_1, \dots, m'_1, n'_2, \dots, m'_2, \dots, n'_S, \dots, m'_S; \end{array} \right. \quad (8)$$

де  $S$  – кількість ділянок контакту,  $n'_1, n'_2, \dots, n'_S$  та  $m'_1, m'_2, \dots, m'_S$  – індекси у згущеній сукупності вузлових точок розбиття лівих та правих меж ділянок контакту.

Систему (8) далі зведемо до задачі квадратичного програмування: знайти мінімум величини

$$Y = \sum_{k=1}^S \sum_{v=n'_k}^{m'_k} C_v \left( \left( \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} - F_v \right) \sigma_v \right)$$

за умов

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} A_{v,n} \sigma_n + A_{v,N_1+1} \sigma_{N_1+1} + A_{v,N_1+2} \sigma_{N_1+2} \leq F_v, \\ v = n'_1, \dots, m'_1, n'_2, \dots, m'_2, \dots, n'_S, \dots, m'_S, \\ \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^1 \sigma_n = P, \quad \sum_{k=1}^S \sum_{n=n'_k}^{m'_k} \lambda_n^2 \sigma_n = M, \\ \sigma_n \leq 0, \quad n = n'_1, \dots, m'_1, n'_2, \dots, m'_2, \dots, n'_S, \dots, m'_S; \end{cases}$$

Далі знайдемо розв'язки побудованої ЗКП. При необхідності, вказаний вище процес уточнення ділянок контакту і напружень повторюємо на наступних ітераціях.

**Контактні напруження під штампами, форми яких задаються за допомогою періодичної на деякому проміжку функції.** Нехай форма штампу, яку графічно зображено на рис. 1 а), задається періодичною функцією виду

$$f_{\phi \delta}(\delta) = \begin{cases} r \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{x - x_0}{r} \right)^2} \right), & |x - x_0| \leq \Lambda, \\ r \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{\Lambda}{r} \right)^2} \right), & \Lambda < |x - x_0| \leq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (9)$$

де  $r$  – радіус кругових дуг,  $x_0 = a^* + \frac{T}{2} + \left[ \frac{x - a^*}{T} \right] T$ . Тут позначено  $[x]$  – ціла частина від  $x$ ,

$\Lambda \in \left( 0; \frac{T}{2} \right]$  – деяка стала величина.

Розподіли розрахованих відносних контактних напружень  $p(x) = \frac{\sigma(x)}{2G}$  під таким штампом при відносних значеннях головного вектора сили  $Q = \frac{-P}{2Gr} = 0.0075$  та різних значеннях коефіцієнта тертя зображено на рис. 1 б) та в). Кружечками тут позначено значення усереднених зусиль на кожному періоді, які обчислюються за формулою

$$Q_s = \frac{-1}{2GT} \int_{L_s} \sigma(t) dt, \quad (10)$$

де  $L_s$  –  $s$ -та ділянка контакту.

При таких же характеристиках на цих рисунках зображено ще відповідні відносні контактні напруження  $\rho(x) = \frac{\sigma(x)}{2G}$ , які виникають під плоским штампом [1, 2]. Видно, що в центральних ділянках контакту знайдені усереднені напруження (кружечки) практично збігаються із відповідними значеннями напружень під плоским штампом. Дещо більші відхилення мають місце на крайніх ділянках.

Крім того, на кожній ділянці окремо знайдено розподіли під кожним окремим фрагментом штампу (які вибираємо на окремих періодах), прикладений до якого головний вектор сил дорівнює значенню напружень  $\sigma_j(M_j)T$ , де  $M_j$  – центральна точка на  $j$ -ому періоді. Отримані розподіли відносних контактних напружень зображено на рис. 1 штрих-пунктирними лініями. Як видно із рисунка, одержані таким чином напруження під фрагментами штампів практично збігаються із результатами розрахунків загального алгоритму. Звідси можна зробити висновок, що в таких задачах з достатньою для практики точністю знаходження розподілу напружень під суцільним періодичним штампом можна звести до відшукування розподілів під системою ізольованих штампів за відповідно вибраного навантаження, що на нього діє.

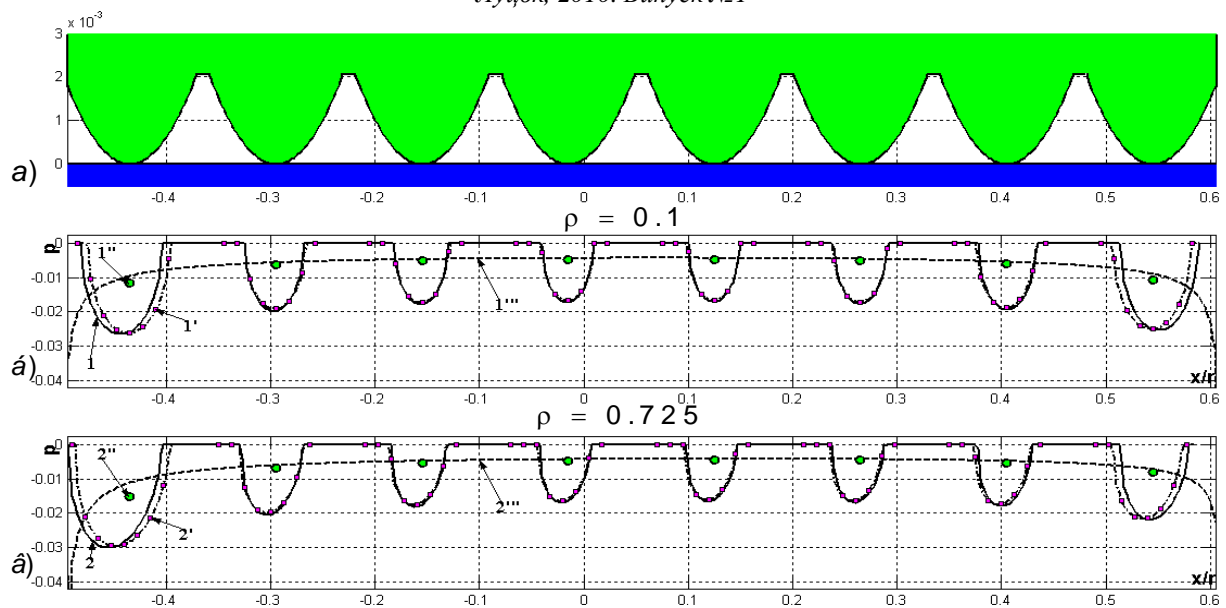


Рис. 1. Розподіли напружень під штампом, форма якого задається функцією (9)

**Контактні напруження під плоским штампом із закругленими краями на хвилястій поверхні.** Дослідимо контактні напруження під плоским штампом із закругленими краями на хвилястій поверхні. Форма цього штапу задається рівнянням

$$f_{\phi\delta}(x) = R \left( 1 - \sqrt[m]{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^m} \right) \text{ при } \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1, \quad (11)$$

де  $R$  – радіус кривизни.

Шорсткість поверхні тіла в літературі часто наближено описують хвилястістю за допомогою косинусоїди [1, 2], тому межу тіла задамо функцією

$$g_\varepsilon(x) = A \cos(kx).$$

Розрахунки виконані при  $m = 8$ ,  $A = 4 \cdot 10^{-5}$ ,  $k = 60$  та  $b = -a = 3\pi R/20$ . Форму штапу та межі тіла наведено на рис. 2.

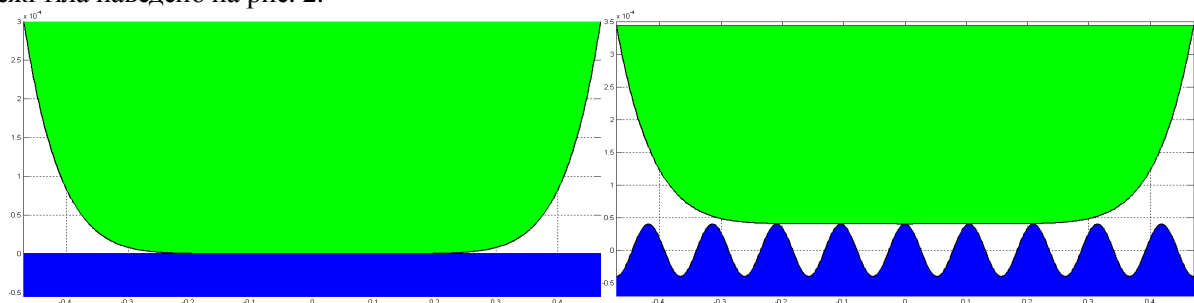


Рис. 2. Штап, форма якого задається функцією (11) на різних типах поверхні: гладкій та хвилястій

На рис. 3 а) та б) при різних значеннях коефіцієнта тертя та головного вектора сили кривим 1-4 відповідають розподіли відносних напружень на шорсткій поверхні, а кривими 1'-4' – на гладкій поверхні. Непарним кривим тут відповідають відносні значення головного вектора сили  $Q_1 = 0.0004$ , а парним –  $Q_2 = 0.0008$ .

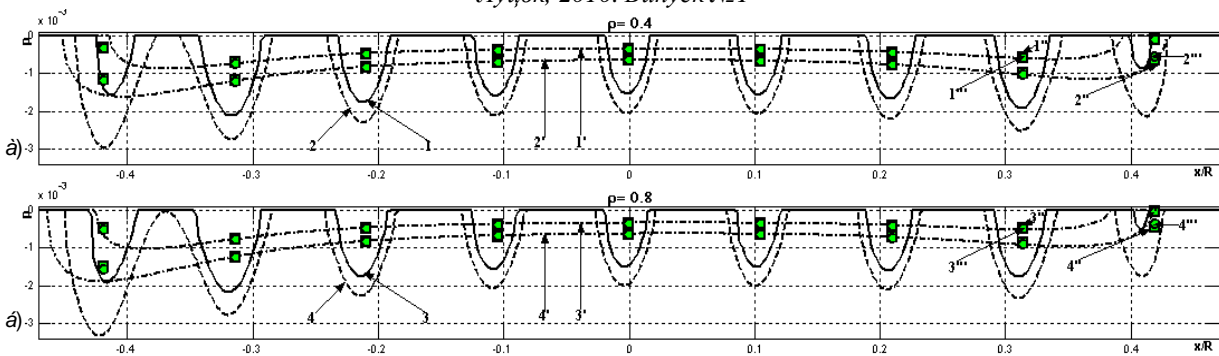


Рис. 3. Розподіли напружень під штампом, форма якого задається функцією (11)

Розраховані значення усереднених зусиль для випадку хвилястої поверхні, які на рисунках зображенні квадратики, під кожним фрагментом штампу практично збігаються із напруженнями у відповідній точці, які знаходяться на основі розгляду гладкого штампу.

**Моделювання контактної взаємодії у радіальному роликовому підшипнику.** Розглянемо задачу про наближене визначення контактних напружень на внутрішній поверхні зовнішнього кільця у радіальному роликовому підшипнику. Умови контакту тут побудуємо зі співвідношень [4]. Схематично підшипник зображено на рис. 4 а). Розподіли одержаних відносних контактних напружень при різних значеннях коефіцієнта тертя та при  $Q = 0.01$  наведено на рис. 4 б) та в). Тут суцільними кривими 1-2 позначено розподіли напружень під роликовими штампами, а штриховими кривими 1'-2' – під гладким (великим) круговим штампом, розміри якого співпадають з розмірами отвору. Квадратиками 1''-2'' тут зображено значення усереднених зусиль під кожним роликом окремо. Видно, що ці значення майже співпадають з напруженнями у відповідних точках під великим круговим штампом.

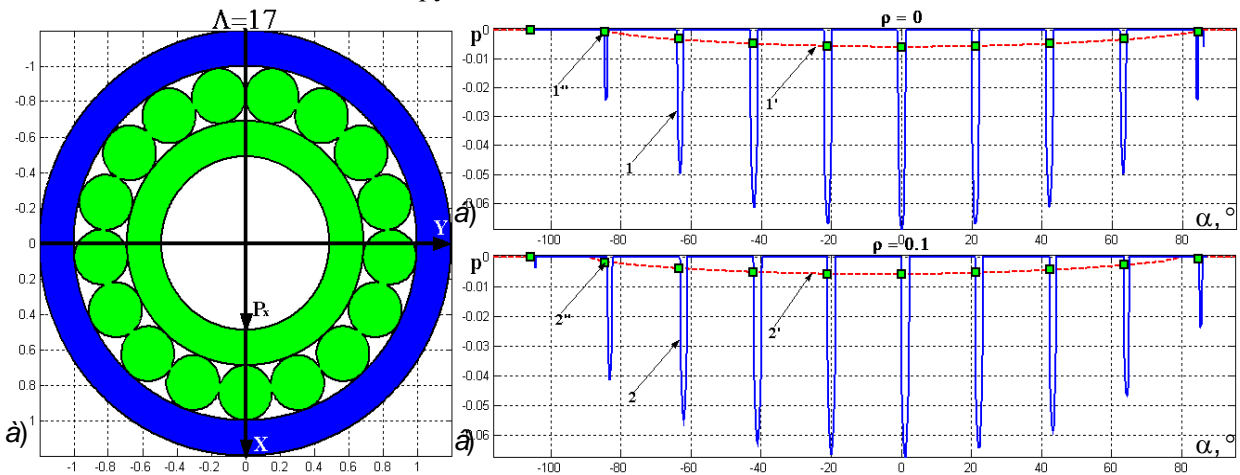


Рис. 4. Розподіли напружень на внутрішній поверхні зовнішнього кільця у радіальному роликовому підшипнику

Тобто таку задачу можна звести до відшукування напружень під системою однакових роликових штампів.

**Висновки.** Розроблений алгоритм визначення контактних напружень під штампами складної форми дозволяє знаходити розподіли з довільною і наперед невизначеною кількістю ділянок їхньої взаємодії. Для випадку, коли відомою є наперед кількість ділянок контакту, розв'язування таких задач аналітичними методами є достатньо складним та проблематичним, оскільки для знаходження меж областей контакту потрібно розв'язувати досить громіздку (яку не завжди можна побудувати) систему трансцендентних рівнянь. Запропоновано модифікований підхід до розв'язування контактних задач, який дозволяє істотно зменшити обсяг обчислень у випадках, коли дискретні ділянки контакту мають малі розміри порівняно з розмірами штампу. Ефективність методу проілюстровано при розгляді контактної взаємодії гладкої півплощини зі штампом періодичної форми та напівнескінченного тіла, обмеженого хвилястим контуром, з майже плоским штампом із закругленими краями. Досліджено контактні напруження у підшипнику, що складається з 17 роликів.

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. Коцюба А.Ю. Комп'ютерне моделювання контактної взаємодії жорсткого штампа складної форми та півплощини з урахуванням сил тертя / А.Ю. Коцюба, С.В. Лавренчук // Наукові нотатки. – Луцьк. – 2010. – Вип. 27. – С. 151-159.
4. Максимович В.М. Числовий алгоритм визначення контактних напружень під штампом складної форми для пластини з круговим отвором / В.М. Максимович, А.Ю. Коцюба // Машинознавство. – 2007. – №10 (124) – С. 10-15.
5. Мартыняк Р.М. Термоупругость контактной пары при наличии шероховатости на локальном участке сопряженных поверхностей / Р.М. Мартыняк, К.А. Чумак // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 32-38.
6. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. – М.: Физматлит, 2001. – 670 с.