

УДК 514.18
Холковський Ю.Р.
Національний авіаційний університет

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИСКРЕТНО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МЕТОДУ

Холковський Ю.Р. Моделювання багатопараметричних середовищ за допомогою дискретно-інтерполяційного методу. У статті розглядається нетрадиційний дискретно-інтерполяційний підхід щодо геометричного моделювання багатопараметричних об'єктів, процесів та середовищ, пропонується побудова їх дискретних математичних моделей. Актуальність даної роботи полягає у розробці раціональних методів моделювання складних багатопараметричних процесів та середовищ.

Ключові слова: інтерполяція, вузол інтерполяції, однопараметрична множина, дискретно задана функція, дискретні моделі, багатопараметричне середовище.

Холковский Ю.Р. Моделирование многопараметрических сред с помощью дискретно-интерполяционного метода. В работе рассматривается нетрадиционный дискретно-интерполяционный метод моделирования многопараметрических объектов, процессов и сред, предлагается построение их дискретных математических моделей. Актуальность данной работы состоит в разработке рациональных методов моделирования сложных многопараметрических процессов и сред.

Ключевые слова: интерполяция, узел интерполяции, однопараметрическое множество, дискретно заданная функция, дискретные модели, многопараметрическая среда.

Kholkovsky Yu.R. Design of multivariable environments by means of discretely-interpolation method.

The unconventional discretely-interpolation method of design of multivariable objects, processes and environments is in-process examined, the construction of their discrete mathematical models is offered. The relevance of this work is to develop best practices for modeling complex multivariable processes and environments.

Keywords: interpolation, interpolation node, one-parameter set, discretely given function, discrete models, multivariable environment.

Постановка проблеми. Багатопараметричні об'єкти, процеси та середовища відносяться до класу об'єктів та систем, що доволі тяжко описуються аналітично і моделюються. Сюди відносяться складні просторові криволінійні форми, як моделі технічних та архітектурно-будівельних об'єктів, певні виробничі та природні процеси, явища та середовища, що характеризуються, по-перше, великою кількістю параметрів, по-друге, ці параметри, як правило мають різноманітну структуру та різноякісні властивості. До того ж, властивості параметрів можуть мати певну анізотропію у часі або просторі. Стає зрозумілим, що побудова аналітичних, тобто континуальних математичних моделей таких об'єктів та середовищ є неможливою задачею. Але ж такі об'єкти та системи досить широко розповсюджені, досліджуються та використовуються у сучасних інженерних розробках, конструкціях, технологіях та наукових дослідженнях. Актуальними є задачі класифікації та дослідження таких систем, визначення їх параметрів та їх властивостей, прогнозування стану багатопараметричних середовищ у часі й просторі. Відповідно, для вирішення подібного роду задач необхідна розробка раціональних алгоритмів і методів і на їх основі створення математичних моделей моделювання багатопараметричних об'єктів та систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У літературі досить рідко зустрічаються окремі випадки розглядання питань геометричного моделювання багатопараметричних систем і середовищ, а також побудови їх математичних моделей. Особливо це стосується таких багатопараметричних систем і середовищ, як, наприклад, екологічні системи, які відрізняються великою кількістю різноманітних і різноякісних параметрів, і для яких аналіз та прогнозування стану є вкрай важливими практичними задачами. Зазначимо, що алгоритми та методи геометричного моделювання складних багатопараметричних систем з побудовою їх математичних моделей у літературних джерелах практично відсутні. Звідки і випливають наступні цілі дослідження.

Метою дослідження є вивчення складних багатопараметричних об'єктів, процесів та середовищ, розробка алгоритмів побудови, методу та дискретних математичних моделей щодо моделювання таких систем.

Основні результати дослідження. У багатьох задачах геометричного моделювання процесів та систем виникає необхідність побудови деякої однопараметричної множини. Таким об'єктом може бути деяка поверхня, як геометрична модель складної просторової криволінійної

технічної форми, що застосовуються у техніці, будівництві, архітектурі. Також це може бути деяка гіперповерхня, як n -вимірний модель певного середовища, що задана аналітично чи дискретно. Як уже зазначалося, побудова аналітичних, тобто континуальних, математичних моделей складних об'єктів та систем практично неможлива. У таких випадках, як правило, переходять до побудови дискретних моделей з певним рівнем адекватності. Відомо, що, дискретний спосіб представлення інформації про об'єкт, чи систему, що моделюється, є універсальним і одним з раціональних.

При моделюванні складних багатопараметричних систем та середовищ, що не піддаються аналітичному опису часто доцільно й раціонально використовувати дискретні математичні моделі, що являють собою певні множини у вигляді чисельних масивів, які, у свою чергу, можуть бути представлені у вигляді дискретних геометричних моделей (точкових чи лінійних). Наше дослідження показує, що такі моделі оптимально підходять для подальшого проектування. В першу чергу це пов'язано з подальшим розвитком та ускладненням таких систем, процесів та середовищ, а також і з великим рівнем їх параметричності.

В роботі пропонується оригінальний нетрадиційний підхід щодо моделювання багатопараметричних об'єктів, процесів, середовищ, що базується на використанні дискретно-інтерполяційного методу. Отже, розглянемо його сутність.

По-перше, у якості інструментарія були використані інтерполяційні поліноми Лагранжа. Вибір саме таких інтерполяційних поліномів Лагранжа, на нашу думку, серед певної кількості інтерполяційних поліномів є оптимальним. Це обумовлено не обов'язковим рівномірним розташуванням вузлів інтерполяції, можливістю представлення по кожній змінній своєї кількості вузлів інтерполяції. Також важливим чинником є й фактор збіжності цих поліномів.

По-друге, на основі запропонованого підходу та інтерполяційних поліномів Лагранжа були побудовані певні інтерполяційні схеми, що характеризуються певною кількістю вузлів інтерполяції i , що найголовніше, характером самих вузлів інтерполяції. Відповідно, отримані таким чином інтерполяційні схеми дозволяють отримати, у випадку одновимірної інтерполяції, однопараметричну множину певних об'єктів чи навіть процесів.

По-третє, і це найголовніше, під вузлами інтерполяції у запропонованому нами підході надалі розуміються не точки, як у випадку класичної інтерполяції, а більш складні математичні об'єкти (лінії та поверхні), або ж, навіть, певні процеси, системи та середовища, що представлені у вигляді деяких функціоналів, як сукупності їх властивостей та параметрів, у чому власне й полягає нетрадиційність та оригінальність запропонованого дискретно-інтерполяційного підходу.

По-четверте, схема розташування саме таких вузлів інтерполяції надалі й розуміється як схема інтерполяції.

Важливо зазначити, що такий підхід щодо моделювання складних багатопараметричних об'єктів, систем та середовищ, наприклад, екологічних систем, процесів чи екологічних ситуацій у літературі взагалі відсутній.

У п'ятому, однопараметричні множини, як деяка сукупність, навіть, різноякісних і різноструктурних параметрів, отримані таким чином, саме й є дискретними математичними моделями таких процесів, систем та середовищ.

По-шосте, елементом таких множин є деяка дискретна функція або функціонал, що у загальному випадку може бути представлена, як дискретний чисельний масив, розмірність якого може варіюватись. Відповідно, інтерполювання функцій, що можуть бути задані неявно чи параметрично, зводиться до розміщення у вузлах інтерполяції рівнянь, якщо можливий аналітичний спосіб завдання, чи дискретних масивів та отримання деякого функціонала з вектором параметрів, що включає в себе інтерполяційний параметр, координатні змінні, параметри, що характеризують форму та положення об'єктів, певні параметричні характеристики процесів та середовищ.

По-сьоме, запропонований дискретно-інтерполяційний підхід дозволяє включати в однопараметричну множину параметри та характеристики систем, процесів та середовищ, що мають різну структуру і навіть властивості. Надзвичайно важливим і цікавим слідством цього є застосування запропонованого підходу щодо моделювання різних роду явищ і середовищ, що характеризуються великою кількістю різноякісних параметрів, які часто просто неможливо функціонально-аналітично поєднати у звичайній математичній моделі. Наприклад, саме такою, власне кажучи, й є, задача прогнозування екологічного стану певної екосистеми і, відповідно, екологічної безпеки цієї системи.

Дискретний підхід можна вважати більш загальним, тому що від неперервно-аналітичної моделі практично завжди можна перейти до дискретної, а саме в нашому випадку до дискретно-інтерполяційної.

При використанні запропонованого дискретно-інтерполяційного підходу поліном Лагранжа може набути такого вигляду:

$$\Phi(u)_n = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(p_1, p_2, \dots, p_m) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \quad (1),$$

де u – параметр інтерполяції, $F(p_1, p_2, \dots, p_k)$ – вузлова функція, p_1, p_2, \dots, p_k – параметри вузлової функції, n – кількість вузлів інтерполяції.

Багатопараметричні системи та середовища, наприкладі екологічних систем, можуть бути настільки складними структурно й параметрично, що використання апарату одновимірної інтерполяції може виявитися недостатнім. У таких випадках доцільно використати апарат двовимірної інтерполяції. Ось у чому полягає його сутність, враховуючи саме запропонований дискретно-інтерполяційний метод моделювання.

Для вирішення певної задачі, наприклад, можна знайти вид степеневого многочлена $\Phi_{m,n}(u,v)$ степеня m по u та n по v , та визначити значення функціонала F у довільній точці з параметрами (u,v) . Цілком зрозуміло, геометрично це означає, що при двовимірній інтерполяції через вузлові точки проходить деяка поверхня $z = \Phi_{m,n}(u, v)$.

Якщо побудувати регулярну сітку та задати у вузлах сітки значення функції z , то вся площадка розпадається на mn прямокутників, в один з яких і потрапить точка (u,v) (рис.1).

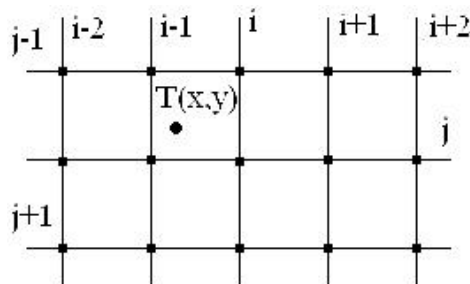


Рис.1 Регулярна сітка при двовимірній інтерполяції

Надалі відбувається інтерполяція при різних u_i , но фіксованих v_j , після чого необхідно перейти до v_{j+1} і повторити знову всю процедуру. Отже, отримуємо двовимірну інтерполяцію $\Rightarrow P_{m,n}(x, y)$ степеня m по x і степеня n по $y \Rightarrow z(x, y)$ у довільній точці $T(x, y)$. Через вузлові точки проводиться деяка поверхня $z = P_{m,n}(x, y)$. Таким чином ми можемо отримати таку формулу двовимірної інтерполяції за Лагранжем для побудови дискретних моделей складних багатопараметричних систем та середовищ:

$$P_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} z(x_j, y_j) \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^{m-1} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{n-1} \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_p - x_i)(y_q - y_j)} \quad (2)$$

Зазначимо, що у найбільш загальному випадку при n -вимірній інтерполяції через вузлові точки проходить деяка гіперповерхня, що являє собою многочлен n змінних, а формула буде мати складніший, але аналогічний вигляд.

Відомо, що інтерполяційний поліном фактично є зрізаним рядом (аналогом ряду Тейлора) у наслідок того, що він обмежений степенем n . Звідки випливає, що важливим фактором є введення певного критерію інтерполяції. Тому для збіжності відповідного аналога ряду Тейлора необхідно спадання абсолютної величини коефіцієнта при u з ростом степеня u . Як відомо й прийнятно,

критерієм гарної апроксимації у випадку багатовимірної інтерполяції є спадання абсолютних величин похідних по всім змінним із зростанням їх порядку.

Отже, запропонований дискретно-інтерполяційний підхід може бути найбільш ефективним при моделюванні об'єктів, процесів та середовищ, що характеризуються великою кількістю різноструктурних та різноякісних параметрів. Наприклад, при моделюванні багатопараметричного середовища, яким є певна екологічна система, може бути розглянута задача якісної й кількісної оцінки впливу забруднення на навколишнє середовище з часом і у просторі. Для таких випадків виникають такі перспективні задачі щодо вивчення та моделювання екологічної ситуації у певному екологічному середовищі чи екосистемі:

1. Аналіз екологічного стану певного середовища
2. Визначення загального рівня шкідливості певної екологічної системи.
3. Визначення й локалізація місць найбільшого та найменшого забруднення.
4. Динамічне та довгострокове прогнозування забруднення навколишньої території, як результату певної екологічної ситуації середовища.

Для вирішення зазначених вище задач можна отримати у вигляді функціонала таку дискретно-інтерполяційну модель щодо визначення локальних параметрів екологічної ситуації певного середовища:

$$\Phi_{\text{шкідл.}}(p_k) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(p_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \quad (3),$$

де $F_i(p_k) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k\}$, а p_1, p_2, p_3, \dots - параметри екологічної системи.

Висновки. Використання запропонованого дискретно-інтерполяційного методу дає можливість будувати дискретні математичні моделі досить складних систем, процесів і середовищ, що характеризуються великою кількістю параметрів та властивостей, які можуть мати не тільки різноманітну структуру, але й певну анізотропність властивостей у часі й просторі.

1. Холковський Ю. Р. Інтерполяція дискретних масивів у загальному випадку як спосіб моделювання багатопараметричних об'єктів та процесів / Ю. Р. Холковський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип.4 – Т51. – Стор. 156-160.
2. Холковський Ю. Р. Моделювання складних просторових форм із використанням дискретно-інтерполяційного підходу / Ю. Р. Холковський // Труды 14-й Международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С.
3. Холковський Ю. Р. Дискретно-інтерполяційна екоматриця, як геометрична модель багатопараметричних процесів та систем в екології / Ю. Р. Холковський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4 – Т55. – Стор. 308-311.