УДК 514.18
Малютина Т.П., Давыденко И.П.
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

ТОЧЕЧНОЕ ЗАДАНИЕ СИМПЛЕКСОВ С ОБЩИМ ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ

Малютина Т.П., Давыденко И.П. Точечное задание симплексов с общим центром тяжести. Обобщено понятие медианы на многомерное пространство, дано уравнение двухпараметрического множества симплексов плоскости и трехпараметрического множества пространства с общим центром тяжести.
Ключевые слова: точечное уравнение, медиана, центр тяжести, симплекс.

Малютіна Т.П., Давиденко І.П. Точкове визначення симплексів з загальним центром ваги. Узагальнено поняття медіани на багатовимірний простір, подано рівняння двопараметричної множини симплексів площини і трипараметричної множини простору з загальним центром ваги.
Ключові слова: точкове рівняння, медіана, центр ваги, симплекс.

Malutina T.P., Davydenko I.P. Dot definition simplexes with a common center of gravity. Generalize the concept of median on a multi-dimensional space, given the equation of two-parameter set of simplexes plane and three-parameter sets of the space with a common center of gravity.
Keywords: dot equation, the median, the center of gravity, simplex.

Постановка проблемы. Для треугольника, определяющего плоскость в пространстве, понятия медиан и центра тяжести взаимосвязаны. Возникают вопросы такой связи для тетраэдра, который, по сути, является трехмерным обобщением треугольника. Поставленную задачу можно решить методами БН-исчисления [1-5].

Анализ последних исследований. Определению особых точек треугольника и их геометрических свойств в БН-исчислении (точечное исчисление Балюбы-Найдыша) посвящена работа [6], но в ней автор ограничился исследованием свойств особых точек, включая и центр тяжести, только в симплексе плоскости. В БН-исчислении попытки обобщения понятий центра тяжести на пространства больших размерностей не предпринимались.

Формулировка целей статьи. Обобщить в БН-исчислении понятие центра тяжести на пространства размерностей больше двух.

Основная часть. Заданы три точки A, B, C, образующие симплекс [2] двухмерного пространства CAB. Требуется в плоскости треугольника ABC задать все тройки точек A_1, A_2, A_3, имеющие с этим треугольником ABC общий центр тяжести (рис. 1).

Для решения поставленной задачи зададим искомые вершины треугольников точечными уравнениями в симплексе CAB:

$$A_1 = Ap_1 + Bq_1 + Cr_1,\ \ A_2 = Ap_2 + Bq_2 + Cr_2,\ \ A_3 = Ap_3 + Bq_3 + Cr_3. \qquad (1)$$

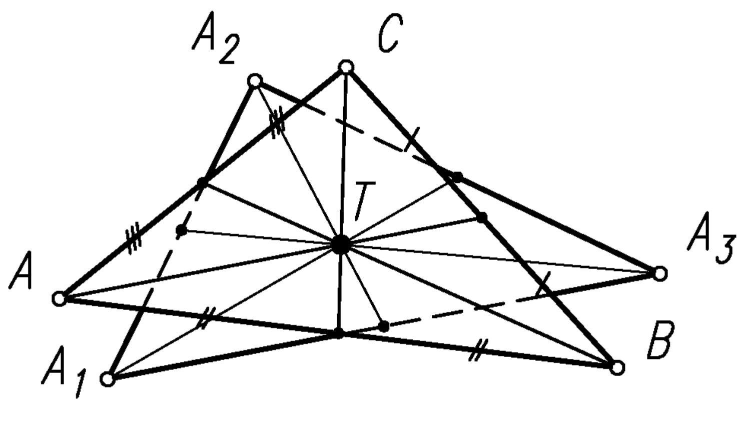

Рис. 1. **Центр тяжести в симплексе двухмерного пространства**

На основании соотношений, полученных в [7], определим общий центр тяжести T треугольников ABC и $A_1A_2A_3$:

$$T = \frac{A+B+C}{3} = \frac{A_1+A_2+A_3}{3} \to A+B+C = A_1+A_2+A_3. \quad (2)$$

Подставим выражения точек A_1, A_2, A_3 из (1) в равенство (2), получим:

$$\begin{aligned} &A+B+C = Ap_1+Bq_1+Cr_1+Ap_2+Bq_2+Cr_2+Ap_3+Bq_3+Cr_3 \to \\ &\to A(1-p_1-p_2-p_3)+B(1-q_1-q_2-q_3)+C(1-r_1-r_2-r_3)=0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для произвольного треугольника ABC последнее соотношение справедливо только при равенстве нулю выражений при точках $A,\ B,\ C$:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1; \\ q_1+q_2+q_3=1; \\ r_1+r_2+r_3=1. \end{cases} \quad (4)$$

Суммируя уравнения системы (3), получим:

$$(p_1+q_1+r_1)+(p_2+q_2+r_2)+(p_3+q_3+r_3)=3. \quad (5)$$

Учитывая, что для двухмерного пространства справедливо соотношение $p_i+q_i+r_i=1$, делаем вывод, что в системе (4) только два из трех уравнений являются независимыми:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ q_1+q_2+q_3=1 \end{cases} \to \begin{cases} p_3=1-p_1-p_2 \\ q_3=1-q_1-q_2 \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя значения параметров из (6) в (1), получим двухпараметрическое множество симплексов, имеющих общий центр тяжести:

$$\begin{cases} A_1=(A-C)p_1+(B-C)q_1+C; \\ A_2=(A-C)p_2+(B-C)q_2+C; \\ A_3=(A-C)(1-p_1-p_2)+(B-C)(1-q_1-q_2)+C. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая s-теорему БН-исчисления [2], определим площади треугольников:

$$\frac{s_{123}}{s} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ 1-p_1-p_2 & 1-q_1-q_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \to s_{123} = s\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где s – площадь треугольника ABC.

Переходим к трёхмерному пространству. Рассмотрим четыре точки $A,\ B,\ C,\ D$, образующие тетраэдр. Требуется в пространстве этого тетраэдра задать все четверки точек $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$, которые имеют общий центр тяжести с точками $A,\ B,\ C,\ D$ (рис. 2).

По аналогии с двухмерным симплексом, зададим искомые вершины тетраэдров $A_1A_2A_3A_4$ точечными уравнениями в симплексе $DABC$:

$$\begin{cases} A_1 = (A-D)p_1 + (B-D)q_1 + (C-D)r_1 + D; \\ A_2 = (A-D)p_2 + (B-D)q_2 + (C-D)r_2 + D; \\ A_3 = (A-D)p_3 + (B-D)q_3 + (C-D)r_3 + D; \\ A_4 = (A-D)p_4 + (B-D)q_4 + (C-D)r_4 + D. \end{cases} \quad (9)$$

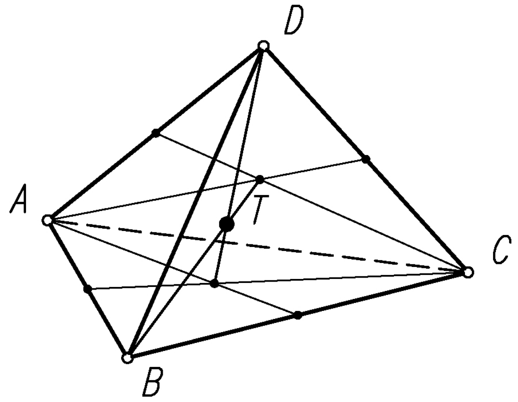

Рис. 2. **Центр тяжести в симплексе трехмерного пространства**

Определим общий центр тяжести тетраэдра:

$$T = \frac{\sum_1^4 A_i}{4} = (A-D)\frac{\sum_1^4 p_i}{4} + (B-D)\frac{\sum_1^4 q_i}{4} + (C-D)\frac{\sum_1^4 r_i}{4} + D = \\ = \frac{(A-D)}{4} + \frac{(B-D)}{4} + \frac{(C-D)}{4} + D. \quad (10)$$

Откуда имеем:

$$(A-D)\sum_1^4 p_i + (B-D)\sum_1^4 q_i + (C-D)\sum_1^4 r_i = (A-D) + (B-D) + (C-D). \quad (11)$$

Получаем связь параметров для тетраэдров с общим центром тяжести с заданным тетраэдром $ABCD$:

$$\sum_1^4 p_i = \sum_1^4 q_i = \sum_1^4 r_i = 1. \quad (12)$$

Откуда имеем:

$$p_4 = 1 - \sum_1^3 p_i, \quad q_4 = 1 - \sum_1^3 q_i, \quad r = 1 - \sum_1^3 r_i. \quad (13)$$

В пространстве имеется трехпараметрическое множество симплексов, имеющее общий центр тяжести с симплексом $DABC$:

$$\begin{cases} A_1 = (A-D)\,p_1 + (B-D)q_1 + (C-D)r_1 + D; \\ A_2 = (A-D)\,p_2 + (B-D)q_2 + (C-D)r_2 + D; \\ A_3 = (A-D)\,p_3 + (B-D)q_3 + (C-D)r_3 + D; \\ A_4 = (A-D)(1-\sum_1^3 p_i) + (B-D)(1-\sum_1^3 q_i) + (C-D)(1-\sum_1^3 r_i) + D. \end{cases} \tag{14}$$

Учитывая v-теорему БН-исчисления [2], определим объемы этих тетраэдров:

$$\frac{v_{1234}}{v} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & r_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \tag{15}$$
$$= -\begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

где v объем тетраэдра $ABCD$.

Геометрический смысл точки T для треугольника ABC известен, как точка пересечения медиан, которая отсекает от основания ее третью часть. Определим геометрический смысл точки T для тетраэдра $ABCD$. Точка T, как и любая его точка, тетраэдр делит на четыре тетраэдра:

$$ABCD = TABC + TBCD + TCDA + TDAB. \tag{16}$$

Особенность центра тяжести состоит в том, что все четыре объема равны между собой:

$$v_{ABCD} = 4v_{TABC} = 4v_{TBCD} = 4v_{TCDA} = 4v_{TDAB} = 4v. \tag{17}$$

Учитывая, что $v_{ABCD} = v_{TABC} + v_{TBCD} + v_{TCDA} + v_{TDAB} = 4v$, получим утверждение, что «медиана» тетраэдра отделяет точкой T от основания четвертую ее часть. Остается выяснить, в какую точку основания проводится эта «медиана».

В симплексе $DABC$ проведем «медиану» DT и определим точку T_{ABC} пересечения ее с основанием ABC (рис. 3):

$$\frac{TT_{ABC}}{DT_{ABC}} = \frac{T-T_{ABC}}{D-T_{ABC}} = \frac{1}{4} \to 4T - 4T_{ABC} = D - T_{ABC} \to$$
$$\to 3T_{ABC} = 4T - D = A + B + C \to T_{ABC} = \frac{A+B+C}{3}. \tag{18}$$

Утверждение. «Медиана» симплекса пространства – это отрезок прямой, соединяющий вершину симплекса с центром тяжести противоположного подсимплекса.

Такое обобщение медианы справедливо как для треугольника, так и для тетраэдра, что обобщает понятие медианы. Аналогичным образом можно решить подобную задачу и в пространстве более высоких размерностей. При этом способ решения, предложенный выше, не изменится, только увеличится количество координат и, соответственно, ранг определителя, который напрямую зависит от размерности пространства.

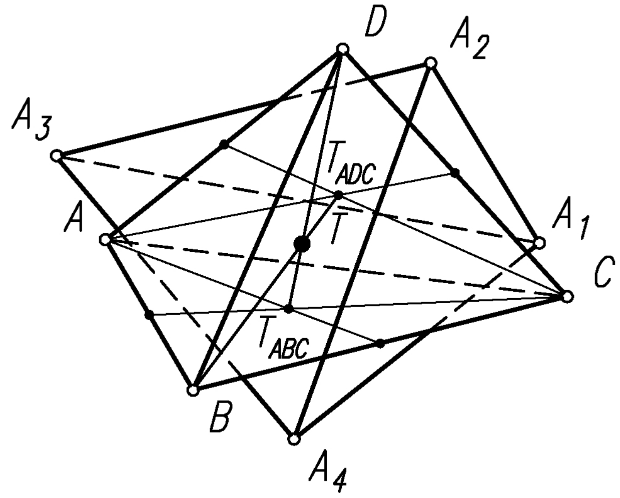

Рис. 3. **Проекция центра тяжести тетраэдра на грани ABC и ADC**

Выводы. В статье обобщено понятие медианы на многомерное пространство, даны уравнения двухпараметрического множества симплексов плоскости и трехпараметрического множества пространства с общим центром тяжести, что позволяет использовать теоретическую базу БН-исчисления, как аппарата моделирования геометрических объектов, в пространстве размерностей больше двух.

1. Найдиш В.М. Алгебра БН-исчисления / Найдыш В.М., Балюба И.Г., Верещага В.М.// Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.210-215.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: диссертация на соискание научной степени доктора технических наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.
3. Балюба І.Г. Основи математичного аппарату точкового числення / Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П. Праці // Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 29. – Мелітополь: ТДАТА, 2005.– С.22-30.
4. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм. [Балюба И.Г., Полищук В.И., Горягин Б.Ф., Малютина Т.П.] // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14-16 мая 2008 р., Том 2. – К.: Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. – С.286-290.
5. Точечное исчисление геометрических форм и его место в ряду других существующих исчислений / [Балюба И.Г., Горягин Б.Ф., Малютина Т.П. и другие] // Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Науковий журнал №6. – Луцьк: ЛНТУ, 2011. – С. 24-29.
6. Малютіна Т.П. Інтерпретація обчислювальної геометрії плоских фігур у точковому численні: Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук: 05.01.01 / Малютіна Тетяна Петрівна – К.: КДТУБА, 1998. – 227 с.
7. Балюба И.Г. Использование площади треугольника, как параметра точечного исчисления для решения геометрических задач / Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бородина А.В. // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика / гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014.– Т.1. – С.11-19.