

УДК 514.18

Кремець Я.С., аспірант

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ПОВЕРХНЯ ОБЕРТАННЯ, ВСІ ГЕОДЕЗИЧНІ ЛІНІЇ ЯКОЇ Є ЗАМКНЕНИМИ І МАЮТЬ ОДНАКОВУ ДОВЖИНУ

Кремець Я.С. Поверхня обертання, всі геодезичні лінії якої є замкненими і мають однакову довжину. Розглянуто алгебраїчну поверхню обертання четвертого порядку, у якої всі геодезичні лінії є замкненими і мають однакову довжину. Складено диференціальні рівняння геодезичної лінії за теоремою Клеро та в загальному вигляді. Побудовано геодезичні лінії на поверхні, що розглядається, та на подібних поверхнях обертання.

Ключові слова: замкнені геодезичні лінії, теорема Клеро, поверхня обертання.

Кремец Я.С. Поверхность вращения, все геодезические линии которой являются замкнутыми и имеют одинаковую длину. Рассмотрено алгебраическую поверхность, у которой все геодезические линии являются замкнутыми и имеют одинаковую длину. Составлено дифференциальные уравнения геодезической линии по теореме Клеро и в общем виде. Построены геодезические линии на рассматриваемой поверхности и на подобных поверхностях вращения.

Ключевые слова: замкнутые геодезические линии, теорема Клеро, поверхность вращения.

Kremetz Ya. The surface of revolution, which all geodetic lines are closed and have equal length. It is considered an algebraic surface at which all geodetic lines are closed and have equal length. It is made geodetic line differential equations under the theorem of Clairaut and in a general view. Geodetic lines on a considered surface and on similar surface of revolutions are built.

Key words: the closed geodetic lines, the theorem of Clairaut, surface of revolution.

Постановка проблеми. На поверхні у всіх напрямках від заданої точки можна провести пучок геодезичних ліній, серед яких можуть бути прямі лінії (твірні поверхні, якщо поверхня лінійчата) і криві. Вони є аналогією прямих ліній на площині, тобто лініями найкоротшої відстані від цієї точки. Незважаючи на те, що способи побудови геодезичних ліній на поверхнях обертання давно відомі, їх зображення на цих поверхнях в науковій літературі зустрічається дуже рідко. Це пояснюється тим, що їх відшукування, як правило, зводиться до чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, здійснити яке до недавнього часу було непросто, а тим більше побудувати саму лінію за одержаними розрахунками. В праці [1, стор. 444] згадується про специфічну алгебраїчну поверхню обертання четвертого порядку, у якої всі геодезичні лінії замкнені, мають однакову довжину і подібні до просторової вісімки. Оскільки зображення цієї поверхні в наведеному джерелі відсутнє, ми дослідили її форму та закономірності розташування геодезичних ліній на ній.

Аналіз останніх досліджень. Властивості геодезичних ліній знаходять своє застосування на практиці. Зокрема, якщо поверхні обертання виготовляти із композитних матеріалів, армованих нитками, то нитки необхідно намотувати саме по цих лініях. Через це дослідженню геодезичних ліній присвячено багато робіт [2-6], включаючи праці по зміцненню оболонок намоткою нитками [5, 6]. Крім того, при проектуванні деяких робочих органів (зокрема, ґрунтообробних), враховують розташування геодезичних ліній на їх поверхні, оскільки частинки технологічного матеріалу при примусовому їх русі по робочому органу намагаються рухатися саме по лініях, близьких до геодезичних, особливо при високих швидкостях переміщення [7, 8].

Формулювання мети статті. Розшукати геодезичні лінії на заданій алгебраїчній поверхні обертання четвертого порядку, які є замкненими і мають однакову довжину, та на інших подібних поверхнях.

Основна частина. Неявне рівняння алгебраїчної поверхні, наведеної в праці [1], має вигляд:

$$16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2), \quad (1)$$

де a – постійна величина.

Поверхню обертання можна описати рівняннями, якщо задані параметричні рівняння меридіана у функції довільного параметра u : $\varphi = \varphi(u)$ і $\psi = \psi(u)$. В такому випадку параметричні рівняння поверхні обертання приймають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= \varphi \cos v; \\ Y &= \varphi \sin v; \\ Z &= \psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Для поверхні (1) параметричні рівняння меридіана мають вигляд:

$$\varphi = \frac{a}{4} \cos u; \quad \psi = a \left(\sin \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} \right). \quad (3)$$

Підстановкою (3) в (2) була побудована поверхня, зображена на рис. 1,а. Вона має краплеподібну форму і характеризується двома розмірами: a – відстань від вершини «краплі» до паралелі найбільшого діаметра, яка до того є геодезичною лінією; r – радіус цієї паралелі. Для поверхні (1) це співвідношення $a/r=4$. Знайдемо рівняння геодезичної лінії цієї поверхні за теоремою Клеро [3]:

$$v = c \int \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi \sqrt{\varphi^2 - c^2}} du, \quad (4)$$

де c – стала, від якої залежить напрям геодезичної лінії в конкретній точці при заданих значеннях внутрішніх координат u і v .

Перші і другі похідні виразів (3) будуть (другі похідні нам потрібні будуть у подальшому):

$$\varphi' = -\frac{a}{4} \sin u; \quad \psi' = \frac{a}{2} \left(\sin \frac{u}{2} + \cos \frac{u}{2} \right); \quad (5)$$

$$\varphi'' = -\frac{a}{4} \cos u; \quad \psi'' = \frac{a}{4} \left(\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{u}{2} \right). \quad (6)$$

Підстановкою (5) у (4) отримуємо вираз, який вдається проінтегрувати:

$$\begin{aligned} v &= 4c \int \frac{2 + \sin u}{\cos u \sqrt{a^2 \cos^2 u - 16c^2}} du = \\ &= 2 \operatorname{Arctg} \frac{4c\sqrt{2} \sin u}{\sqrt{a^2 \cos^2 2u - 32c^2 + a^2}} - \operatorname{Arcctg} \frac{4c\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 \cos^2 2u - 32c^2 + a^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Підстановка виразу $v=v(u)$ (7) і виразів (3) у (2) дає параметричні рівняння геодезичних ліній поверхні, що розглядається. Однак повністю побудувати геодезичну лінію на поверхні з допомогою вказаних формул не вдається, натомість будуються окремі її фрагменти. На рис. 1,б побудовано фрагменти геодезичних ліній при різних значеннях сталої a . Це пояснюється тим, що при зміні параметра u , який є незалежним при побудові геодезичної лінії, поступово охоплюється вся поверхня, наприклад, знизу до верху. Але в нижній і верхній частинах поверхні геодезичної лінії із заданим напрямом немає, вона в певній точці торкається до певної паралелі і повертається в протилежну сторону. Незалежна змінна u не може в певній точці почати зменшуватися, вона тільки монотонно зростає. Таким чином, побудова геодезичної лінії за теоремою Клеро не може бути здійснена в повному обсязі. Потрібно перейти до іншої змінної. Такою змінною може бути довжина дуги s геодезичної лінії. В такому випадку змінні u і v будуть функціями незалежної змінної s : $u=u(s)$, $v=v(s)$. Формула (4) після диференціювання і з врахуванням нової незалежної змінної s запишеться:

$$\frac{v'}{u'} = \frac{cu'}{\varphi} \sqrt{\frac{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2}{\varphi^2 - c^2}}. \quad (8)$$

У формулі (8) диференціювання виразів $\varphi=\varphi(u)$ і $\psi=\psi(u)$ здійснюється по змінній u , решта похідних – по змінній s . До рівняння (8) входить дві невідомі функції $u=u(s)$ і $v=v(s)$, отже для їх знаходження потрібно мати ще одне рівняння. Цим рівнянням може бути відома тотожність для кривої, заданої у функції довжини дуги s : $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Продиференціюємо (2) по змінній s і після підстановки в наведену тотожність отримаємо:

$$\varphi^2 v'^2 + u'^2 (\varphi_u'^2 + \psi_u'^2) = 1. \quad (9)$$

Систему рівнянь (8) і (9) потрібно розв'язати відносно v' і u' . Однак отримані вирази є дуже громіздкими, крім того містять квадратні корені, що робить їх практично непридатними для використання. Ми скористалися диференціальним рівнянням другого порядку геодезичних ліній, отриманим в праці [4] для поверхонь обертання:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\varphi(\varphi'_u \varphi''_u + \psi'_u \psi''_u) - 2\varphi'_u(\varphi'^2_u + \psi'^2_u)}{\varphi(\varphi'^2_u + \psi'^2_u)} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{\varphi\varphi'_u}{\varphi'^2_u + \psi'^2_u} = 0. \quad (10)$$

Підставивши у (10) перші (5) і другі (6) похідні, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку геодезичних ліній:

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{\cos 2u - 8 \sin u - 3 \left(\frac{du}{dv}\right)^2}{2 \cos u (2 + \sin u)} - \frac{\sin u \cos u}{(2 + \sin u)^2}. \quad (11)$$

Рівняння (11) не можна розв'язати аналітично, однак до нього не входять підкореневі вирази, незалежною змінною є кут повороту v , що дає можливість з допомогою чисельного інтегрування побудувати геодезичні лінії в повному обсязі. На рис. 1, в, г побудовано три замкнених геодезичних ліній. Дві із них мають точку самоперетину. Кожну із цих двох ліній можна зсовувати по поверхні до найбільшої паралелі, яка показана потовщеною лінією і теж є геодезичною. При такому переміщенні точка самоперетину буде рухатися до вказаної паралелі і коли попаде на неї, то дві петлі геодезичної лінії збіжаться із паралеллю. Таким чином, довжина замкненої геодезичної лінії буде рівною $4\pi r$, або ж із врахуванням, що $a/r=4$, довжина буде рівною πa . Очевидно, що при розтягуванні замкненої геодезичної лінії її можна сумістити із одним із меридіанів, які теж є геодезичними кривими. Знайдемо довжину s меридіана:

$$s = \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} du = \frac{a}{4} \int (2 + \sin u) du = \frac{au}{2} - \frac{a}{4} \cos u. \quad (12)$$

Щоб меридіан був замкнений, тобто, представляв собою профіль поверхні (рис. 1), змінна u повинна змінюватися в межах $-1,5\pi \dots 0,5\pi$. Підставивши ці межі у отриманий вираз (12), отримаємо: $s = \pi a$. При визначенні довжини всіх інших геодезичних ліній чисельними методами теж отримуємо цей результат. Отже вказана поверхня за властивостями геодезичних ліній подібна до кулі: в якому напрямі ми б не провели геодезичну лінію, вона завжди буде замкненою і однакової довжини. Щоправда, для кулі всі геодезичні лінії будуть однаковими колами, а для поверхні, що розглядається – просторовими лініями з точкою самоперетину та плоскими кривими (меридіани та одна паралель).

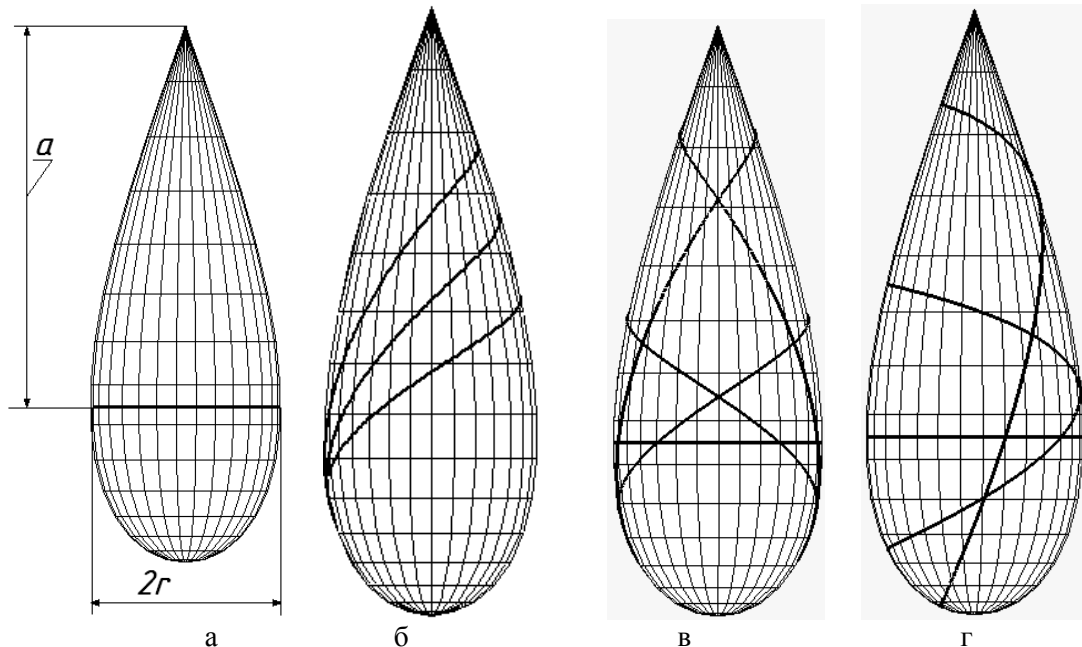


Рис. 1. Фронтальні проєкції краплеподібної алгебраїчної поверхні обертання:
 а) основні розміри поверхні;
 б) фрагменти геодезичних ліній, побудованих за формулою (7);
 в), г) геодезичні лінії на фронтальній і профільній проєкціях, побудовані за формулою (11).

Нами були побудовані геодезичні лінії на подібних поверхнях із іншим співвідношенням $a/r=m$. В такому випадку рівняння меридіана приймають вигляд:

$$\varphi = r \cos u; \quad \psi = rm \left(\sin \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} \right), \quad (13)$$

де r – радіус найбільшої паралелі (геодезичної лінії).

При $m=4$ отримаємо поверхню, яку ми розглянули. Було також складено диференціальне рівняння геодезичних ліній для поверхні із довільним значенням m :

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = - \left(2 \operatorname{tg} u + \frac{0,5 \cos u (m^2 + 8 \sin u)}{m^2 + \sin u (m^2 + 4 \sin u)} \right) \left(\frac{du}{dv} \right)^2 - \frac{2 \sin 2u}{m^2 + \sin u (m^2 + 4 \sin u)}. \quad (14)$$

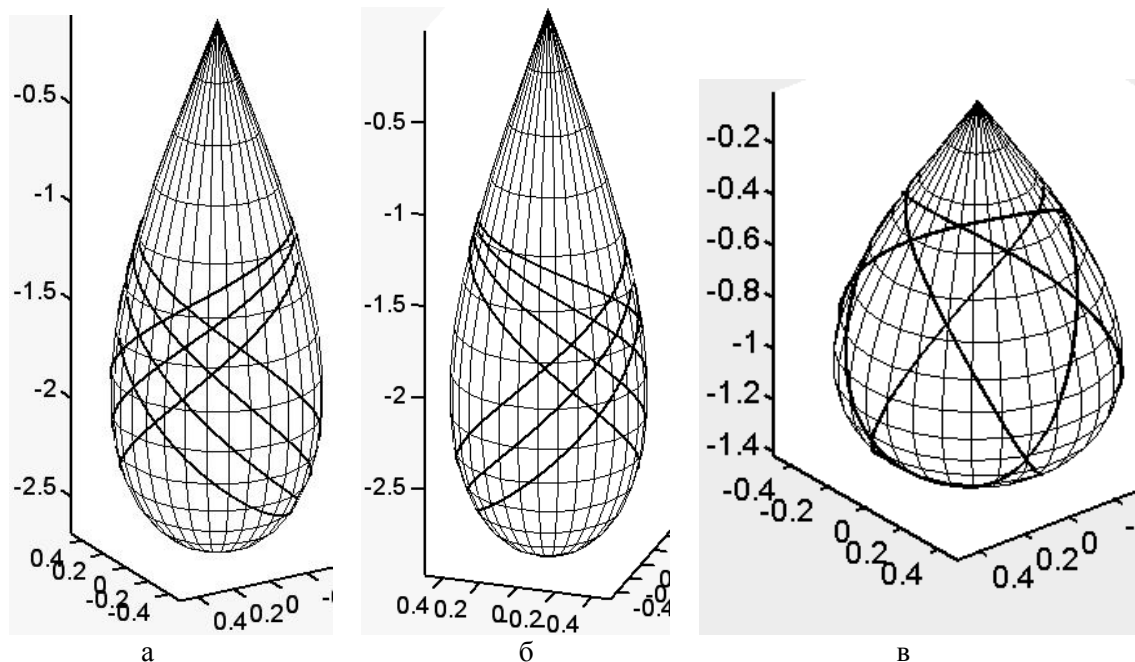


Рис. 2. Поверхні обертання з геодезичними лініями на них для різних значень m у рівнянні (13) їх меридіана:
 а) $m=3,8$; б) $m=4,2$; в) $m=2$.

На рис. 2 за допомогою чисельних методів побудовано геодезичні лінії на поверхнях із співвідношенням m , близьким до 4. Варто зауважити, що для цих поверхонь названі властивості геодезичних ліній зникають. Вони стають незамкненими (рис. 2,а,б). Можна підібрати лінію замкнену, але це вже буде не просторова вісімка, а крива із багатьма точками самоперетину (рис. 2,в).

Висновки. Розглянута алгебраїчна поверхня обертання четвертого порядку унікальна за своїми геодезичними лініями. Всі вони (окрім меридіанів і однієї паралелі) мають форму просторової вісімки із точкою самоперетину. Всі вони (включаючи і плоскі – меридіани і паралель) – замкнені і мають однакову довжину. Стала a , яка входить у рівняння поверхні, не впливає на її краплеподібну форму, а тільки на розміри. Довжина всіх ліній рівна πa . Якщо $a=1$, то довжина всіх ліній дорівнює π , а радіус найбільшої паралелі рівний 0,25 лінійних одиниць. Геодезична лінія, яка збігається із цією паралеллю, двічі охоплює неї на відміну від інших геодезичних ліній. При незначному відступі від співвідношення між висотою і найбільшою паралеллю поверхні ця властивість втрачається.

1. Аппель П. Теоретическая механика. Том первый. Статика. Динамика точки / П. Аппель. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 515 с.
2. Урмаев Н.А. Приведенная длина геодезической линии / Н.А. Урмаев // Известия АН СССР. - Сер. матем., 5:4-5 (1941). – С. 369–376.
3. Пилипака Т.С. Особливості геодезичних ліній на поверхнях обертання / Т.С. Пилипака, В.М. Бабка, Я.С. Кременець // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Науковий журнал. – Луцьк: ЛНТУ, 2011. - № 6. – С. 182 – 185.
4. Пилипака С.Ф. Теоретичний пошук рівнянь геодезичних ліній в кінцевому вигляді на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Я.С. Кременець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. –К.: КНУБА, 2011. –Вип. 87. – С. 302 – 308.

5. *Завидский А. В.* Определение параметров технологической поверхности, обеспечивающей непрерывность намотки по геодезическим линиям / А.В. Завидский // Труды МАИ. 1976. - № 349. - С. 34-35.
6. *Якунин В.И.* Вопросы геометрического проектирования процесса намотки составной поверхности / В.И. Якунин, В.А. Калинин, Т.В. Аюшев // Компьютерная геометрия и графика в инженерном образовании: Материалы всесоюзной конференции. - Нижний Новгород, 1991. - С. 149.
7. *Войтюк Д.Г.* Побудова геодезичних ліній, як граничних траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного аграрного університету. –К.: НАУ, 2003. –Вип. 60. –С. 138-141.
8. *Юрчук В.П.* Проектування поверхні роторного копача шляхом використання геодезичної лінії / В.П. Юрчук, О.Г. Гетьман // Труды Таврической государственной агротехнической академии. – Вып.4. Прикл. геометрия и инж. графика. - Т.6. – Мелито-поль: ТГАТА, 1999. – С. 85 – 88.