УДК 514.18
Конопацкий Е.В., Чернышева О.А.
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГРАФО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Конопацкий Е.В., Чернышева О.А. Теоретические основы определения топографической поверхности графо-вычислительным методом. В статье предложены два способа определения топографической поверхности графо-вычислительным методом, которые являются теоретической основой определения топографической поверхности с помощью равномерной сети, используя линейную и параболическую интерполяцию на топографических картах и планах в БН-исчислении.
Ключевые слова: линейная интерполяция, параболическая интерполяция, топографическая поверхность, профиль топографической поверхности, дискретное множество точек, географические информационные системы.
Форм. 7. Табл. - 0. Рис. 2. Лит. 9.

Конопацький Є.В., Чернишова О.О. Теоретичні основи визначення топографічної поверхні графо-обчислювальним методом. В статті запропоновано два способи визначення топографічної поверхні графо-обчислювальним методом, які є теоретичною основою визначення топографічної поверхні за допомогою рівномірної сітки, використовуючи лінійну та параболічну інтерполяцію на топографічних картах і планах у БН-численні.
Ключові слова: лінійна інтерполяція, параболічна інтерполяція, топографічна поверхня, профіль топографічної поверхні, дискретна множина точок, географічні інформаційні системи.

Konopatskiy E.V., Chernysheva O.A. The theoretical basis for determining topographic surface graph-computing method. The article suggests two ways to determine the topographic surface graph-computing methods, which are the theoretical basis for determining the topographic surface by a uniform grid using linear and parabolic interpolation on topographic maps and plans in the BN-calculation.
Keywords: linear interpolation, parabolic interpolation, topographical surface profile topographic surface, a discrete set of points, geographic information systems.

Постановка проблемы. Поверхность, не имеющая четкого закона своего образования, называется графической поверхностью. Графические поверхности встречаются в геодезии, геологии, судостроении, автомобилестроении, авиационной промышленности и т.д. Земную поверхность принято называть топографической поверхностью.

Поверхность в проекциях с числовыми отметками обычно задается своими горизонталями. Горизонтали поверхности можно представить как линии сечения этих поверхностей горизонтальными плоскостями, проведенными с постоянным шагом. Построение таких горизонталей является задачей градуировки поверхности.

С помощью ПЧО (проекций с числовими отметками) проводится графическое решение задач на топографических поверхностях, которые в силу простоты их графического построения и сложности аналитического описания топографической поверхности, являются, с практической точки зрения, более предпочтительными.

Однако, в связи с переходом в нашей стране к частной собственности и рыночной экономике, образовался целый класс задач, связанных с градостроительством и землеустройством, для которых графические способы решения проектных задач являются недостаточно точными. Таким образом, для решения этого особого класса задач, предлагается использовать новый графо-вычислительный метод, предложенный в [1]. Сущность предлагаемого метода заключается в том, что исходная информация берется непосредственно с карты или плана, которые, по своей сути, являются источником необходимой информации, далее с помощью аналитических зависимостей проводится решение задачи, после чего полученный результат решения задачи, при необходимости, переносится обратно на карту или план. Такой подход позволяет избежать ошибок, связанных с точностью графических построений при решении задачи и является актуальным для решения задач как на картах с большим масштабом, так и на небольших топографических картах и планах, что особенно актуально для оценки земли в условиях гористой местности и сложного рельефа.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [2] был предложен метод «Лупа», сущность которого заключается в том, что вся поверхность земельного участка делится на сегменты, которые определяются имеющейся сеткой в плане, то есть или прямолинейные с равномерным и неравномерным шагом, или криволинейные с неравномерным шагом и таким, что меняется в пределах одной полосы. При этом, количество ячеек, которые будут входить в состав сегмента, на который наведен лупа, будет зависеть от порядка кривых, ограничивающих этот сегмент. В качестве таких кривых, рассмотрены параболы второго порядка, которые определяются тремя точками. Исходя из сказанного, с использованием в качестве ребер сегмента парабол 2-го порядка, предложенных в [3], минимальное количество узловых точек облака, необходимых для применения способа «Лупа», девять. Он был использован для восстановления потерянной информации в результате удаления избыточной информации полученной с помощью НЛС (наземное лазерное сканирование). Однако в ГИС чаше используют другие способы представления картографической информации, которые могут быть представлены в графическом (карты, планы) и электронном виде. Графическое представление информации основано на методе проекций с числовыми отметками, поэтому в работах [1, 4] авторами был предложен графо-вычислительный способ решения прикладных задач в проекциях с числовыми отметками, который, в свою очередь, базируется на математическом аппарате БН-исчисление [5-9].

Нерешенные части проблемы. Адаптация метода «Лупа», предложенного в [2], для описания топографической поверхности использования в ГИС.

Цель исследований. Разработать теоретические основы определения топографической поверхности графо-вычислительным способом.

Основные результаты исследований. Рассмотрим сначала способ линейной интерполяции как наиболее простой.

Сформулируем задачу. Пусть задано дискретное множество точек: $A^1_{a_1}, A^2_{a_2}, A^3_{a_3}, \cdots, A^i_{a_i}, A^{i+1}_{a_{i+1}}$. С помощью половинного деления нужно загустить этот дискретный ряд точек.

Для решения этой задачи используем точечную формулу деления отрезка пополам, полученную в [4].

Между текущими дискретными точками $A^i_{a_i}$ и $A^{i+1}_{a_{i+1}}$ будет точка, которая делит заложение пополам и имеет высотную отметку $\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$. Тогда загущенный ряд принимает вид:

$$A^1_{a_1}, A^{1,5}_{\frac{a_1+a_2}{2}}, A^2_{a_2}, A^{2,5}_{\frac{a_2+a_3}{2}} A^3_{a_3}, \cdots, A^i_{a_i}, A^{i,5}_{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}}, A^{i+1}_{a_{i+1}}. \tag{1}$$

Далее рассмотрим способ параболической интерполяции на основе способа «Лупа», полученного в [1], который может быть эффективно использован в тех случаях, когда метод линейной интерполяции не даёт необходимой точности в расчётах. Этот метод использует для описания топографической поверхности дугу параболы второго порядка, которая определяется тремя точками. За основу берутся 9 точек топографической поверхности, которые представлены как 3 опорных дуги параболы второго порядка (направляющие), по которым течёт также дуга параболы (образующая). Для описания всей топографической поверхности достаточно перебрать все известные точки топографической поверхности каждый раз выбирая новые 9 точек для её описания.

Определим высотные отметки дискретно заданной топографической поверхности. Пусть дана сеть в плане в виде четырех прямоугольников со сторонами a и b (рис. 1). В каждой вершине сети известна высотная отметка: $A_{ij} \to a_{ij}$.

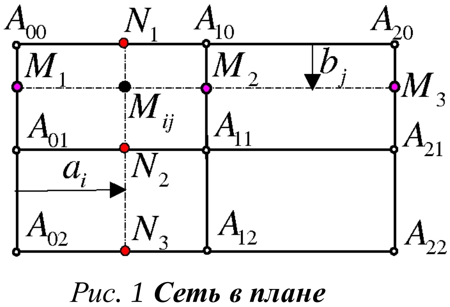

Рис. 1 ***Сеть в плане***

В соответствии с рисунком 1, определим следующие координаты узлов сетки: $A_{00}(0,0,a_{00})$, $A_{10}(a,0,a_{10})$, $A_{20}(2a,0,a_{20})$, $A_{01}(0,b,a_{01})$, $A_{11}(a,b,a_{11})$, $A_{21}(2a,b,a_{21})$, $A_{02}(0,2b,a_{02})$, $A_{12}(a,2b,a_{12})$, $A_{22}(2a,2b,a_{22})$.

Как было сказано выше, для параболической интерполяции топографической поверхности поочерёдно берутся девять её точек. При этом три тройки точек: $A_{00}A_{01}A_{02}$, $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{20}A_{21}A_{22}$ составляют три опорных контура, через которые проводится дуга параболы 2-го порядка. Таким образом, получим три текущие точки, расположенные на прямой плана (заложения), которые образуют криволинейный профиль, $M_1M_2M_3$, на котором, в свою очередь, находится текущая точка M_{ij} с высотной отметкой m_{ij}.

Построение профиля $A_{00}A_{01}A_{02}$.

К геодезическим материалам относится также и профиль местности, являющийся уменьшенным изображением вертикального разреза земной поверхности по заданному направлению. Линия, изображающая на чертеже уровенную поверхность, на профиле проводится в виде прямой. Для усиления изображения рельефа на профиле, большей его наглядности, вертикальные отрезки (отметки, превышения) изображают крупнее, чем горизонтальные. Профиль строят в виде кривой линии, поворотные точки которой являются характерными точками местности, отметки которых определены.

Представим уравнение кривой профиля в виде параболы 2-го порядка [3], проходящей через три точки (рис. 2):

$$M_1=(A_{00}-A_{01})\bar{u}(1-2u)+(A_{01}-A_{02})u(1-2u)+A_{01}, \tag{2}$$

где $0\le u\le 1$.

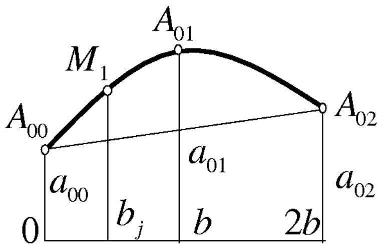

Рис. 2 ***Профиль кривой***

Поскольку данное уравнение принадлежит точечному исчислению, то оно справедливо для координат точек:

$$b_j=(0-b)\bar{u}(1-2u)+(b-2b)u(1-2u)+b. \tag{3}$$

Из этого соотношения выразим параметр u через координату b_j сетки: $u=\dfrac{b_j}{2b}$. Тогда точечные уравнения опорной дуги $A_{00}A_{01}A_{02}$, принимает вид:

$$M_1=(A_{00}-A_{01})(1-\frac{b_j}{2b})(1-\frac{b_j}{b})+(A_{01}-A_{02})\frac{b_j}{2b}(1-\frac{b_j}{b})+A_{01}. \tag{4}$$

Аналогичным образом определяем опорные дуги $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{20}A_{21}A_{22}$:

$$\begin{aligned}M_2&=(A_{10}-A_{11})(1-\frac{b_j}{2b})(1-\frac{b_j}{b})+(A_{11}-A_{12})\frac{b_j}{2b}(1-\frac{b_j}{b})+A_{11},\\M_3&=(A_{20}-A_{21})(1-\frac{b_j}{2b})(1-\frac{b_j}{b})+(A_{21}-A_{22})\frac{b_j}{2b}(1-\frac{b_j}{b})+A_{21}.\end{aligned} \tag{5}$$

Формируя подвижный симплекс $M_1M_2M_3$, получим точечное уравнение сегмента топографической поверхности:

$$M_{ij} = (M_1 - M_3)(1-v)(1-2v) + (M_2 - M_3)v(1-2v) + M_3. \quad (6)$$

По аналогии с соотношением (3) определим значение параметра $v = \frac{a_i}{2a}$. Подставив его в уравнение (6), получим:

$$M_{ij} = (M_1 - M_3)(1-\frac{a_i}{2a})(1-\frac{a_i}{a}) + (M_2 - M_3)\frac{a_i}{2a}(1-\frac{a_i}{a}) + M_3. \quad (7)$$

Этим уравнением описывается сегмент топографической поверхности, который определяется 9-ю точками по методу «Лупа», предложенному в [2]. Таким образом, можно определить высотную отметку в любой точке топографической поверхности, используя в качестве исходных данных карту или план местности. Следует отметить, что в соответствии с рисунком 1 можно было бы задавать опорные контуры не только текущими точками M_1, M_2 и M_3, но и используя текущие точки N_1, N_2 и N_3. При этом ход решения задачи и результат её решения будут аналогичными.

Выводы. В статье предложены два способа определения топографической поверхности графо-вычислительным методом, которые являются теоретической основой определения топографической поверхности с помощью равномерной сети, используя линейную и параболическую интерполяцию на топографических картах и планах в БН-исчислении. В перспективе планируются исследование способов определения топографической поверхности на неравномерной сети графо-вычислительным методом в БН-исчислении.

1. Конопацкий Е.В.Теоретические основы решения задач с точками и прямыми в проекциях с числовыми отметками / Е.В. Конопацкий, О.А. Чернышева // Вісник Черкаського університету. Серія прикладна математика. Інформатика. Науковий журнал.– 2013. - №38(291). - С. 33-40.
2. Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. Кучеренко Вадим Володимирович. – Мелітополь, 2013. – 234 с.
3. Бумага А.І. Точкове рівняння дуги параболи другого порядку / Бумага А.І. // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск). Вип.90. – К.: КНУБА, 2012. – С. 49-52.
4. Конопацкий Е.В. Решение интерполяционных задач на топографических картах и планах методами БН-исчисления / Е.В.Конопацкий, О.А.Чернышева // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Математика. Геометрія. Інформатика. - 2014. - Том 1. - С.80-85.
5. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: диссертация на соискание научной степени доктора технических наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – С. 227.
6. Балюба І.Г. Основи математичного апарату точкового числення / І. Г. Балюба, В. І. Поліщук, Т. П. Малютіна// Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - 2005. – Т. 29. – С.22-30.
7. Балюба И.Г. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм / И.Г . Балюба, В. И. Полищук, Б. Ф. Горягин, Т. П. Малютина // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14-16 мая 2008. - Том 2. – С.286-290.
8. Найдыш В.М. Алгебра БН-исчисления / В.М. Найдыш, И. Г. Балюба, В. М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – 2012. – С.210-215.
9. Балюба И.Г. Точечное исчисление геометрических форм и его место в ряду других существующих исчислений / И. Г. Балюба, Б. Ф. Горягин, Е.В. Конопацкий и другие // Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Науковий журнал №6. – 2011. – С. 24-29.