

УДК 514.181.6 + 514.182

Журило А.Г. к.т.н., доц., Сивак Є.М. к.т.н., доц. Адашевська І.Ю. к.т.н., доц.  
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

## ОСНОВНА ТЕОРЕМА АКСОНОМЕТРІЇ – ТЕОРЕМА ПОЛЬКЕ-ШВАРЦА ТА ЇЇ ПРАКТИЧНЕ ВИКОРИСТАННЯ

**Журило А.Г., Сивак Є.М., Адашевська І.Ю. Основна теорема аксонометрії – теорема Польке-Шварца та її практичне використання.** У статті розглянуто основну теорему аксонометрії – теорему, яку в 1860 році сформулював К. Польке, а найпростіший доказ запропонував у 1864 році Г. Шварц. Показано практичне використання вказаної теореми. Наведено приклади використання коефіцієнтів спотворення.

**Ключові слова:** аксонометрія, теорема Польке – Шварца, коефіцієнти спотворення, аксонометричні масштаби.

**Журило А.Г., Сивак Е.М., Адашевская И.Ю. Основная теорема аксонометрии – теорема Польке-Шварца и её практическое применение.** В статье рассмотрена основная теорема аксонометрии - теорема, которую в 1860 году сформулировал К. Польке, а самый простой способ доказательства предложил в 1864 г. Г. Шварц. Показано практическое применение указанной теоремы. Приведены примеры использования коэффициентов искажения.

**Ключевые слова:** аксонометрия, теорема Польке - Шварца, коэффициенты искажения, аксонометрические масштабы.

**Zhurilo A.G., Sivak E.M., Adashevska I.Yu. The main theorem of axonometry – Polke-Schwartz's theorem and its practical application.** In the article the main theorem axonometric - theorem, which in 1860 formulated K. Polke, and the easiest way evidence was offered in 1864 y. G. Schwartz a made. The practical the use of implementation of this theorem. Examples of the use of distortion factor.

**Keywords:** axonometry, theorem Polke - Schwarz, distortion factor, axonometric scale.

**Вступ.** Незважаючи на широкий розвиток комп'ютерної техніки, застосування її для виконання креслеників, появи вже декількох поколінь програм КОМПАС, AUTOCAD та їхніх аналогів, аксонометричні проекції широко використовуються у машинобудуванні та архітектурі.

**Аналіз останніх досліджень та літератури.** Питання про точні графічні побудови має велику історичну давнину, беручи свій початок ще в роботах Евкліда, Архімеда та інших вчених. Однак, заглибленого наукового обґрунтування ці методи почали набувати після опублікування робіт французького філософа і математика Рене Декарта (1596 – 1650 рр.). Декартом була запропонована система осей координат на площині та у просторі, що дозволила математикам і технікам розв'язувати на папері задачі метричного характеру [1, 2].

З вичерпною повнотою і строгою науковою обґрунтованістю теорія точних метричних побудов була розроблена математиком Гаспаром Монжем, який у 1795 – 1799 рр. опублікував результати своєї двадцятирічної роботи під назвою «Нарисна геометрія» [1].

Серед імен, з якими пов'язаний розвиток наукової праці в області аксонометричних проекцій, можна згадати видатних вітчизняних вчених: М.О. Риніна, А.І. Добрякова, Д.І. Каргіна, М.Ф. Четверухіна, Н.О. Глаголева, О.О. Вольберга, Н.М. Бескіна, І.І. Котова, Є.А. Глазунова, С.О. Смирнова [3, 4].

У даний час теорія аксонометрії розроблена докладно і висвітлена в численних працях з нарисної геометрії. Питання ж практики побудови аксонометричних зображень висвітлені в літературі недостатньо. Тим часом, у практиці побудови аксонометричних зображень можуть виникнути значні труднощі, обумовлені не тільки недостатньою підготовкою виконавця, але і складністю окремих задач, що вимагають спеціального роз'яснення [5, 6].

Положення ускладнюється ще й тому, що за останні 20..30 років практично не публікувалося робіт із практики побудови аксонометричних зображень та її основних законів. Ті ж роботи, що були опубліковані раніше, у більшості випадків розглядають аксонометричні проекції, не передбачені ГОСТ 2.317 – 69 [3, 4].

**Мета дослідження, постановка проблеми.** Довести значне практичне значення теореми Польке – Шварца та показати основні властивості аксонометричних проекцій, які зумовлені вказаною теоремою – основною теоремою аксонометрії [8].

**Матеріали дослідження.** Як відомо, основною теоремою аксонометрії є теорема Польке – Шварца.

Вперше вона була висловлена К. Польке в 1853 р.: «Три відрізки  $OE_x$ ,  $OE_y$  і  $OE_z$  довільної довжини, що належать одній площині і виходять з однієї точки  $O'$  під довільними кутами один до одного, становлять рівнобіжну проекцію трьох рівних відрізків  $OE_x$ ,  $OE_y$  і  $OE_z$ , відкладених на

прямокутних осях координат від початку  $O$ » [2, 3].

Ця теорема є важливою для визначення системи аксонометричних осей і аксонометричних масштабів.

Будь-який повний чотирикутник, який не вироджується, можна розглядати як рівнобіжну проекцію тетраедра наперед заданої форми.

Звернемо увагу, що повним чотирикутником вважають фігуру, утворену чотирма точками загального положення (вершинами) і шістьма прямими, обумовленими вершинами. Чотирикутник, що не вироджується, є таким, у якого не всі чотири вершини належать одній прямій.

Припустимо, що є довільний тетраедр  $A_0B_0C_0D_0$  і повний чотирикутник  $ABCD$  (рис. 1).

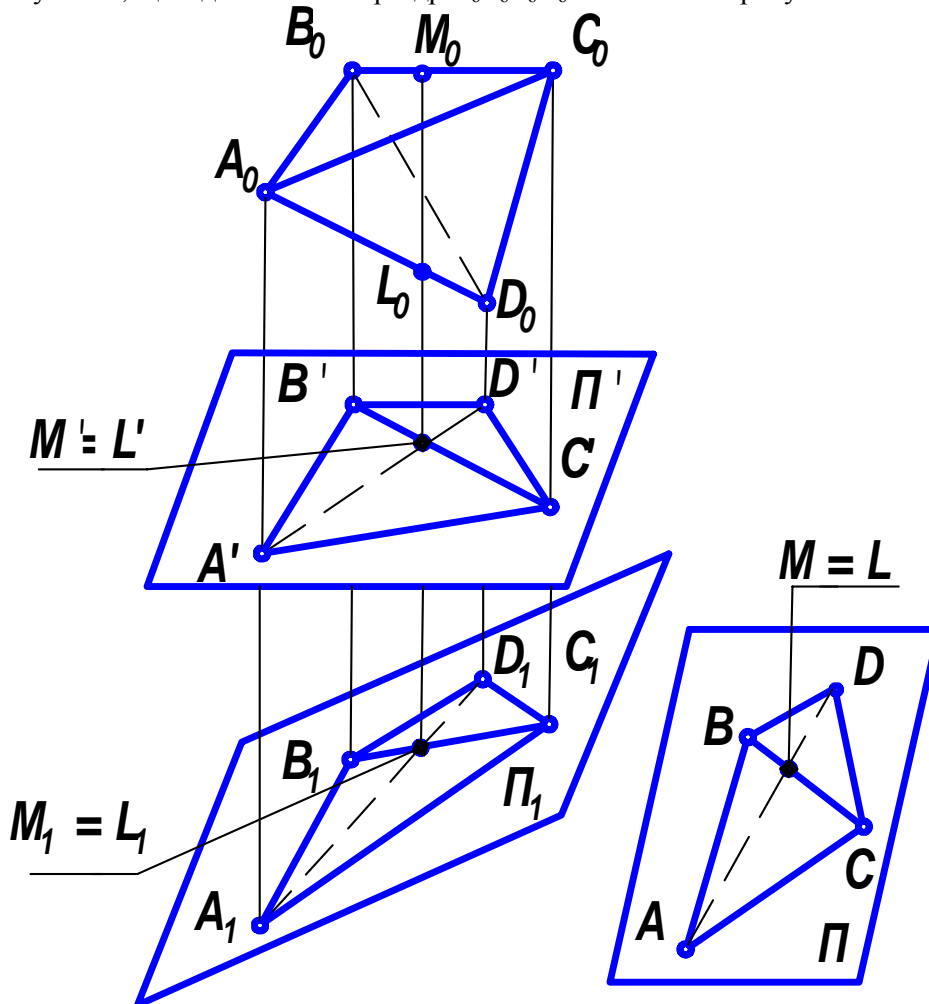


Рис. 1. Перетворення довільного тетраедра  $A_0B_0C_0D_0$  і повного чотирикутника  $ABCD$

Будемо розглядати останній як проекцію деякого тетраедра [8]. У такому випадку шість сторін повного чотирикутника є проекціями ребер цього тетраедра. Таким чином, необхідно позначити двома буквами діагональну точку перетинання двох сторін, відносячи її до ребра  $AD$  (точка  $L$ ) або до ребра  $BC$  (точка  $M$ ). Просте відношення трьох точок не змінюється при рівнобіжному проєцюванні, тому можна знайти точки  $L_0$  і  $M_0$  відповідно на ребрах  $A_0D_0$  та  $B_0C_0$  початкового тетраедра з умов:

$$(A_0L_0D_0) = (ALD), (B_0M_0C_0) = (BMC).$$

Приймаємо напрямок прямої  $M_0L_0$  за напрямком проєцювання, тому що пряма  $M_0L_0$  проєцюється в одну точку. Спроєцюємо тетраедр за напрямком  $M_0L_0$ , для чого через кожну вершину проведемо проєцюючі лінії, та отримаємо проєцюючу призму. Перетнемо її довільною площиною  $\Pi'$ . У перетині буде повний чотирикутник  $A'B'C'D'$ , в якому:

$$(A'L'D') = (A_0L_0D_0) = (ALD); (B'M'C') = (B_0M_0C_0) = (BMC).$$

Повний чотирикутник  $A'B'C'D'$  є афінним чотирикутником  $ABCD$ . Розглядаючи чотирикутник  $A'B'C'D'$  як основу призми, можна побудувати перетин  $A_1B_1C_1D_1$  проєцюючої

призми площиною  $\Pi_1$ , який буде подібним чотирикутнику  $ABCD$ . Таким чином, повний чотирикутник  $A_1B_1C_1D_1$  є рівнобіжною проекцією даного тетраедра  $A_0B_0C_0D_0$ , а заданий чотирикутник  $ABCD$  є проекцією тетраедра, подібного даному.

Можна зробити висновок, що якщо задано проекцію тетраедра на площині  $\Pi$  (повний чотирикутник  $ABCD$ ), то напрямок проєціювання та положення площини проєкцій можна знайти, як і натуральні розміри початкового тетраедра. При цьому розв'язанням задачі є чотири випадки.

Дійсно, проєціюючій призмі відповідає відносно площини проєкцій симетрична проєціююча призма. У кожній з них початковий тетраедр може займати два істотно різних положення, симетричних щодо нормального перетину проєціюючої призми.

**Результати дослідження.** З теореми Польке - Шварца можна зробити висновки дуже великого практичного значення. Якщо визначити систему прямокутних координат у просторі  $OXYZ$ , а також відкладені по осях координат одиничні відрізки (масштабні відрізки), кінці яких позначимо буквами  $E_x, E_y, E_z$ , то отримаємо масштабний тетраедр  $OE_xE_yE_z$  (рис. 2).

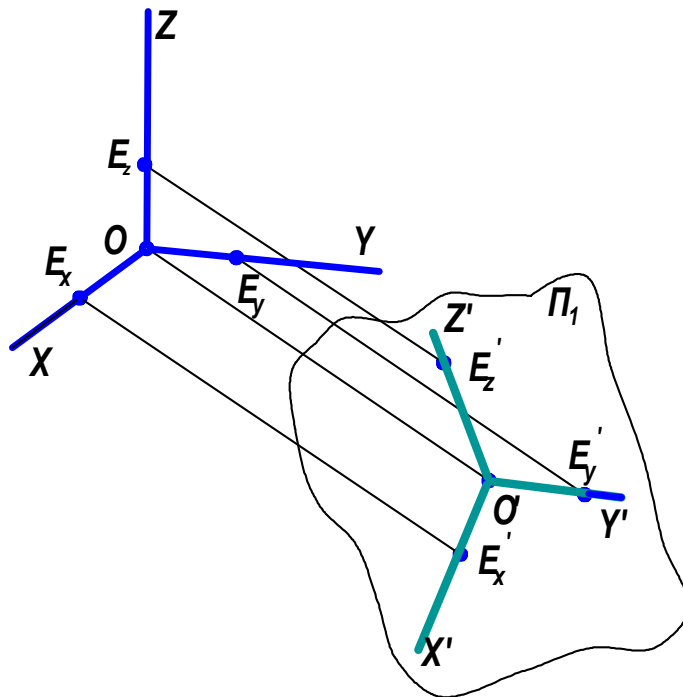


Рис. 2. Паралельне проєціювання системи прямокутних координат у просторі  $OXYZ$  на будь-яку площину  $\Pi_1$  [8]

Однією вершиною масштабного тетраедра є початок координат  $O$ , а трьома іншими вершинами — кінці масштабів по осях координат  $E_x, E_y$  і  $E_z$ . Масштабний тетраедр є тетраедром спеціального вигляду. Три його грані — рівнобедрені прямокутні трикутники, а четверта грань — рівнобічний трикутник.

Припустимо, що система прямокутних координат у просторі  $OXYZ$  (будемо називати її натуральною системою координат), проєцюється паралельно на будь-яку площину  $\Pi_1$  (рис. 2). У такому випадку масштабний тетраедр зобразиться у вигляді повного чотирикутника, шість сторін якого є проєкціями шести ребер масштабного тетраедра [7]. Натуральні осі координат  $OXYZ$  зобразяться в проєкції на площину  $\Pi_1$  трьома прямими лініями, що виходять із точки  $O'$ , яка є зображенням початку координат  $O$ . Ця система трьох прямих  $O'X'Y'Z'$  (аксонометричних осей) називається аксонометричною системою координат, а три проєкції натурального масштабу по осях координат  $O'E'_x, O'E'_y, O'E'_z$  називаються аксонометричними масштабами.

Застосовуючи теорему Польке - Шварца до розглянутого випадку, коли початковий тетраедр є масштабним тетраедром, можна зазначити наступне: довільний повний чотирикутник, що не вироджується, завжди можна розглядати як рівнобіжну проекцію масштабного тетраедра натуральної системи координат у просторі.

Як для теорії аксонометрії, так і в багатьох практичних її застосуваннях ця теорема має фундаментальне значення. Справді, на підставі теореми Польке - Шварца система

аксонометричних осей, а також і аксонометричних масштабів на них може бути задана зовсім довільним чином. Завжди знайдеться таке положення прямокутної системи натуральних координат у просторі і такий розмір натурального масштабу по осях, що задана аксонометрична система виявиться рівнобіжною проекцією натуральної системи.

З теореми Польке – Шварца легко вивести основні властивості аксонометричних проекцій.

1. Проекцією точки є точка, проекцією прямої – пряма (колінеарність).
2. Якщо точка належить прямій, то проекції точки (аксонометричні і вторинні) належать однойменним проекціям цієї прямої (інцидентність зберігається).
3. Якщо лінії (прямі або криві) у просторі перетинаються, то проекції цих ліній також перетинаються, причому точки перетинання проекцій є однойменними проекціями точки перетинання самих ліній у просторі.
4. Якщо прямі в просторі взаємно паралельні, то їхні проекції також взаємно паралельні.
5. Проекції відрізків однієї і тієї ж прямої лінії пропорційні самим відріzkам. Відношення відрізків взаємно паралельних прямих дорівнює відношенню їхніх проекцій. Ця властивість разом із властивістю 4 дає можливість користуватися системою аксонометричних координат так само, як системою натуральних координат, що і становить сутність аксонометричного способу побудови зображень.
6. Якщо пряма торкається кривої лінії в будь-якій точці А, то проекція прямої торкається проекції кривої в точці А<sub>1</sub>, яка буде проекцією точки торкання А. Торкання можна розглядати як граничний випадок перетинання, тому дана властивість є похідною з властивості 3.
7. Якщо лінії, фігури або сторони кутів належать площині, паралельній картині, то відрізки ліній, фігури і кути проєкуються на останню без спотворення.
8. Усі аксонометричні проекції мають однакове спотворення.

Наприклад, точні коефіцієнти спотворення для ізометричної проекції становлять:  $K_x = K_y = K_z = 0,82$ . Але на практиці часто використовують коефіцієнти спотворення  $K_x = K_y = K_z = 1$ . Пов'язане це з тим, що при побудові аксонометрії кресляр буде вимушений кожен розмір (як мінімум раз, а максимум – тричі) помножити на 0,82 та округлити отриманий результат треба не грубо, а з однаковим наближенням. Тому наведені коефіцієнти спотворення вибираються таким чином, щоб спростити аксонометричні масштаби і перехід натуральних координат в аксонометричні. Для цього застосовують коефіцієнти спотворення рівні одиниці, збільшуючи приблизно в 1,22 рази їхню натуральну величину.

На рис. 3 зображені для зрівняння нормальна і збільшена ізометричні проекції куба з ребром, рівним одиниці натурального масштабу. Як видно з кресленика, нормальне і збільшене зображення відрізняються одне від одного лише розмірами, зберігаючи всі інші властивості, у тому числі і наочність. А трудомісткість побудови знижується, що важливо для початківців.

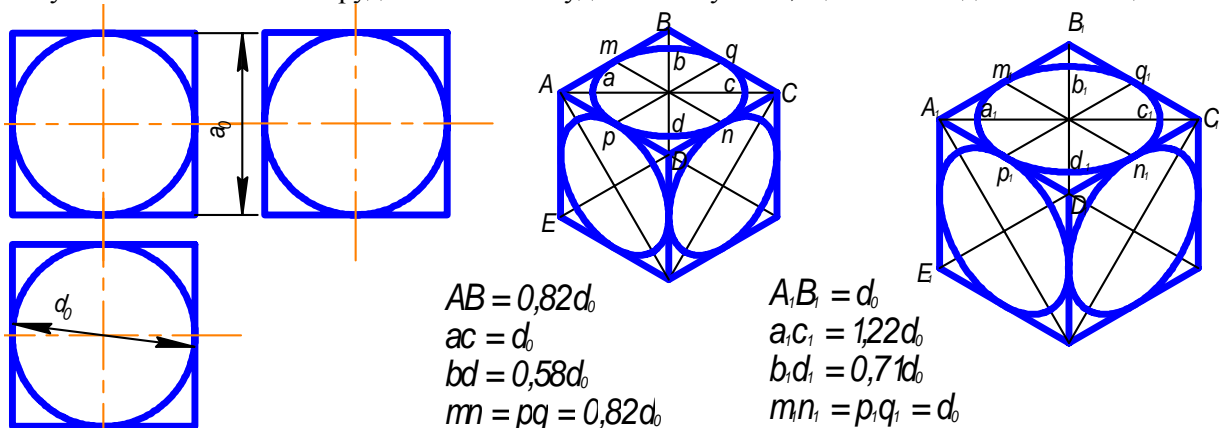


Рис 3. Нормальна і збільшена ізометричні проекції куба з ребром, що дорівнює одиниці натурального масштабу [8]

**Висновки.** Теорема Польке – Шварца є основною теоремою аксонометрії, яка дозволяє визначити систему аксонометричних осей і аксонометричних масштабів. З теореми Польке – Шварца легко вивести основні властивості аксонометричних проекцій, які є ідентичними властивостям ортогональних креслеників. При побудові аксонометрії з коефіцієнтом спотворення  $K_x = K_y = K_z = 1$ , натуральну величину треба збільшити приблизно в 1,22 рази. Нормальне і збільшене зображення відрізняються одне від одного лише розмірами, зберігаючи всі інші

властивості, у тому числі і наочність при суттєвому зниженні трудомісткості побудови аксонометрії.

1. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии : учебник / В. О. Гордон, М. А. Семенов - Огиевский. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. Каменев В. И. Аксонометрические проекции : Альбом чертежей / В. И. Каменев. — Москва–Свердловск : Гос. изд - во машиностроит. лит., 1946. – 72 с.
3. Порсин Ю. Я. Аксонометрические изображения машиностроительных деталей : учебник / Ю. Я. Порсин. – М.- Л. : Машгиз, 1973. – 188 с.
4. Ланюк А. В. Аксонометрические проекции : учебник / А. В. Ланюк. — М. : Гос. изд - во лит - ры по строительству и архитектуре, 1956. – 176 с.
5. Журило А. Г. Методика построения аксонометрических проекций тел вращения на примере изометрической проекции цилиндра / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2007. – № 11. – С. 78 – 81.
6. Журило А. Г. Методика построения аксонометрических проекций тел вращения на примере изометрической проекции конуса / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ».— 2005. – № 57. – С. 65 – 68.
7. Журило А. Г. Побудова деяких геометричних тіл у диметрії / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2008. – № 43. – С. 128 – 131.
8. Журило А. Г. Теоретичні та практичні основи аксонометрії [Текст] / А. Г Журило. Навч. посібник. Х.: НТУ «ХПИ», 2010. - 196 с.