

УДК 530.1

Човнюк Ю.В.<sup>1,2</sup>, Герасимчук Г.А.<sup>3</sup>, Гуменюк Ю.О.<sup>1</sup>, Диктерук М.Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев,

<sup>2</sup>Киевський національний університет будівництва та архітектури, г. Киев,

<sup>3</sup>Луцкий национальный технический университет, г. Луцк.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАМЫ СТАНКОВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ БАЛАНСИРОВКИ

**Човнюк Ю.В., Герасимчук Г.А., Гуменюк Ю.О., Диктерук М.Г.** Использование модели математического маятника в анализе нелинейных колебаний рамы станков для динамической балансировки. Обоснована модель математического маятника для анализа нелинейных колебаний рамы станков для динамической балансировки. Используются методы Ван-дер-Поля и Крылова-Боголюбова для случая нелинейного порождающего уравнения, которым является уравнение колебаний математического маятника с вязким трением.

**Ключевые слова:** модель, анализ, нелинейность, колебания, математический маятник, рама, станки, динамика, балансировка.

**Човнюк Ю.В., Герасимчук Г.А., Гуменюк Ю.О., Диктерук М.Г.** Використання моделі математичного маятника в аналізі нелінійних коливань рами верстатів для динамічного балансування. Обґрунтована модель математичного маятника для аналізу нелінійних коливань рами верстатів для динамічного балансування. Використані методи Ван-дер-Поля та Крилова-Боголюбова для випадку нелінійного породжувачого рівняння, яким є рівняння коливань математичного маятника з в'язким тертям.

**Ключові слова:** модель, аналіз, нелінійність, коливання, математичний маятник, рама, верстати, динаміка, балансування.

**Chovnyuk YU., Herasymchuk H., Humenyuk YU., Dikteruk M.** Use of model of mathematical pendulum in the analysis of nonlinear vibrations of frame of machine-tools for the dynamic balancing. In the article proved a model of mathematical pendulum for the analysis nonlinear oscillations frame machines for dynamic balancing. For the case of non-linear equations (equation of a mathematical pendulum oscillations of viscous friction) was used Methods of Van der Pol and Krylov-Bogolyubov.

**Key words:** model, analysis, nonlinearity, oscillation, mathematical pendulum, machine frame machining station, dynamics, balancing.

**Постановка проблемы.** Современные станки для динамической балансировки, за небольшим исключением, представляют собой системы с одной степенью свободы, колебания подвижных частей которых происходят вокруг некоторой оси, определяемой конструкцией станка. Подобные станки востребованы при монтаже и наладке станков с числовым программным управлением (ЧПУ), оснащенных мехатронными системами управления и коррекции движения их рабочих органов. Поскольку нелинейные колебания для всех станков описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, то для его составления можно воспользоваться рассмотрением одного из станков.

Для анализа нелинейных колебаний рамы указанных станков для балансировки, по мнению авторов данного исследования, целесообразно использовать комбинированный подход в задаче моделирования таких колебаний, а именно тот, который сочетает методы Ван-дер-Поля и Крылова-Боголюбова (для случая нелинейного порождающего уравнения). При этом, сохраняя условия консервативности порождающего уравнения, такая постановка задачи может, например, возникнуть при изучении нелинейного осциллятора с трением в том случае, когда нас интересуют колебания с не малыми амплитудами (в частности, вблизи сепаратрисных решений).

**Анализ последних исследований и публикаций.** Дифференциальное уравнение колебаний рамы балансировочного станка в линейном приближении получено и исследовано в [1]. Для анализа указанного уравнения в нелинейной постановке, когда угол отклонения рамы от положения устойчивого равновесия не мал, по мнению авторов данного исследования следует использовать методы и подходы, приведенные и обоснованные в [2 - 10]. Результаты указанных выше работ будут использованы в данном исследовании.

**Цель работы** – обосновать математическую модель нелинейных колебаний рамы балансировочного станка и исследовать динамику объекта численно-аналитическим подходом, базирующимся на результатах работ, представленных в [2 - 10].

**Изложение основных результатов работы.**

1. Уравнение колебаний рамы балансирующего станка.

Современные станки для динамической балансировки, используемые для монтажа и эффективной эксплуатации систем станков с числовым программным управлением (ЧПУ) и мехатронными системами коррекции движения их рабочих органов, за небольшим исключением, представляют собой системы с одной степенью свободы, колебания подвижных частей которых происходят вокруг некоторой оси, определяемой конструкцией станка. Так как эти колебания для всех станков описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, то для составления уравнения можно воспользоваться рассмотрением одного из станков.

На рис. 1 показана принципиальная схема балансирующего станка рамного типа.

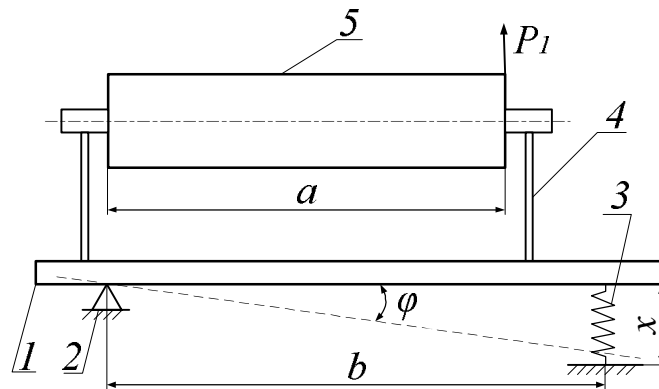


Рис. 1. Геометрия задачи:

1 – рама станка, 2 – шарнир, 3 – пружина, 4 – стойка, 5 – балансируемая деталь

На раме 1 станка установлена на стойках 4 балансируемая деталь 5, рама связана со станиной неподвижным шарниром 2, вокруг которого она может поворачиваться, и упругой связью 3. Рама может совершать только вращение вокруг горизонтальной оси шарнира 2.

Обозначив обобщенную координату через  $\varphi$ , запишем дифференциальное уравнение вращательного движения рамы:

$$I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_{i=1}^n M_i, \quad (1)$$

где  $I_0$  – массовый момент инерции относительно оси шарнира рамы и балансируемой детали;

$M_i$  – момент  $i$  – й внешней силы, действующей на раму и деталь;

$\varphi$  – угол отклонения рамы от положения устойчивого равновесия;

$n$  – число внешних сил.

Определим моменты внешних сил, действующих на раму.

1.1 Возмущающий момент силы инерции приведенной неуравновешенной массы детали.

В [1] показано, что неуравновешенные массы детали в общем случае могут быть приведены к двум точкам, лежащим в произвольно выбранных плоскостях. Конструкция машины позволяет изменять положение детали на раме относительно жесткой опоры. Допустим, что одна из плоскостей приведения совпадает с осью вращения рамы. При вращении детали центробежная сила одной из приведенных масс воспринимается жесткой опорой, а второй массы – вызывает колебания рамы. Так как конструкция машины допускает колебания каждой точки рамы только в вертикальной плоскости, то возбуждает колебания вертикальная составляющая центробежной силы, которая будет определяться так:

$$P_1 = m_1 \rho_1 \omega^2 \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $P_1 = m_1 \rho_1$  – статический момент приведённой массы относительно оси вращения;

$\omega$  – угловая скорость детали;

$\omega t$  – мгновенный угол, который составляет центробежная сила с вертикальной плоскостью;

$t$  – время.

Момент силы (2) относительно оси вращения рамы равен:

$$M_1 = m_1 \rho_1 \omega^2 a \cos \omega t, \quad (3)$$

где  $a$  – расстояние между плоскостью приведения неуравновешенных масс (оно равно расстоянию между плоскостями установки уравновешивающих грузов).

### 1.2 Момент восстанавливающей силы гибкой опоры.

При колебании рамы происходит упругая деформация гибкой опоры; восстанавливающая сила этой опоры действует на раму. При малых деформациях можно считать справедливым закон Гука; восстанавливающая сила поэтому равна:

$$P_2 = -cx, \quad (4)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости гибкой опоры;

$x$  – ее линейная деформация.

Для величины  $x$  получаем:

$$x = b \sin \varphi, \quad (5)$$

где  $b$  – расстояние между гибкой и жесткой опорами.

Момент силы  $P_2$  относительно оси жесткой опоры будет равен:

$$M_2 = -cbx. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получаем

$$M_2 = -cb^2 \sin \varphi. \quad (7)$$

### 1.3 Момент сил сопротивлений.

Колеблющаяся рама при движении преодолевает различные сопротивления: сопротивление окружающей среды, сопротивление трения в соединениях, сопротивление в измерительных приборах и т.д. При колебаниях приведенный момент сил сопротивлений можно приближенно считать пропорциональным первой степени угловой скорости рамы:

$$M_3 = -\beta \frac{d\varphi}{dt}, \quad (8)$$

где  $\beta$  – приведенный коэффициент затухания;

$\frac{d\varphi}{dt}$  – угловая скорость рамы.

Подставив (3), (7) и (8) в (1), получим дифференциальное уравнение движения рамы в таком виде:

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \beta \frac{d\varphi}{dt} + cb^2 \sin \varphi = m_1 \rho_1 \omega^2 a \cos \omega t. \quad (9)$$

Движение, описываемое уравнением (9), является результатом наложения на свободные затухающие нелинейные колебания рамы вынужденных колебаний, возникающих под действием возмущающих сил.

Для малых значений угла  $\varphi$  можно полагать  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Этот случай детально исследован в [1].

Введем следующие замены переменных и обозначения:

$$\tau = \omega t; \quad t \rightarrow \tau; \quad \alpha_1 = \frac{\beta}{I_0 \omega}; \quad \alpha_2 = \frac{cb^2}{I_0 \omega^2}; \quad \alpha_3 = \frac{m_1 \rho_1 a}{I_0}. \quad (10)$$

Тогда (9) можно представить следующим образом:

$$\varphi_{\tau\tau} + \alpha_1 \varphi_{\tau} + \alpha_2 \sin \varphi = \alpha_3 \cos \tau, \quad (11)$$

где  $\varphi_{\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau}$ ,  $\varphi_{\tau\tau} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$ .

Анализ (11) проведем в два этапа. Сначала рассмотрим аналитические решения для однородного уравнения, вытекающего из (11), которые описывают свободные нелинейные колебания системы, т.е.:

$$\varphi_{\tau\tau} + \alpha_1 \varphi_{\tau} + \alpha_2 \sin \varphi = 0. \quad (12)$$

Для анализа (12) используем подходы, развитые в [10].

А. рассмотрим случай  $\alpha_1 \rightarrow 0$ . Тогда полная энергия колебаний приобретает значение:

$$E = \frac{1}{2} (\varphi_{\tau})^2 + \alpha_2 (1 - \cos \varphi). \quad (13)$$

Решение уравнения

$$\varphi_{\tau\tau} + \alpha_2 \sin \varphi = 0, \alpha_2 > 0 \quad (14)$$

в квадратурах. При этом после замены  $z = \sin \frac{\varphi}{2}$  зависимость  $\tau = \tau(z)$  выражается через эллиптический интеграл первого рода. В качестве эллиптического модуля принимаем  $\sqrt{E/(2\alpha_2)}$  или  $\sqrt{(2\alpha_2)/E}$  в зависимости от соотношения  $E$  и  $2\alpha_2$ .

Критическая энергия  $E_0 = 2\alpha_2$  соответствует сепаратрисному решению:

$$\varphi = -\pi + 4 \operatorname{arctg}[\exp(\sqrt{\alpha_2} \tau)]. \quad (15)$$

При малых энергиях  $E < E_0 = 2\alpha_2$  решение для колебаний (нелинейных) математического маятника имеет вид:

$$\varphi = 2 \operatorname{arcsin}[k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha_2} \tau, k)], \quad (16)$$

где модуль  $k$  определяет энергию и частоту ( $\Omega$ ) осциллятора:

$$E = E_0 k^2, \Omega = \frac{\sqrt{\alpha_2} \pi}{2K}. \quad (17)$$

В (16)  $\operatorname{sn}(u, k) \equiv \sin[\operatorname{am}(u, k)]$  – эллиптический синус (синус Якоби), а в (17)  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода. Напомним, что по определению

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad (18)$$

а для эллиптического интеграла первого рода имеем:

$$F(\tilde{\varphi}, k) = \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{dy}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 y)}} = \int_0^{\operatorname{sn} \tilde{\varphi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}. \quad (19)$$

Обозначая  $F(\tilde{\varphi}, k) = u(\tilde{\varphi})$ , для обратной функции  $\tilde{\varphi}(u) = \operatorname{am}(u, k)$  имеем т.н. эллиптическую амплитуду.

При больших энергиях  $E > E_0 = 2\alpha_2$  вращение математического маятника (нелинейные колебания  $\varphi$ ) описываются функцией:

$$\varphi = 2 \operatorname{arcsin}[\operatorname{sn}(\sqrt{\alpha_2} \tau/k, k)] \equiv 2 \operatorname{am}(\sqrt{\alpha_2} \tau/k, k). \quad (20)$$

**Б.** Рассмотрим случай  $\alpha_1 \neq 0$ , причем  $\alpha_1 \ll 1$  (слабое/небольшое вязкое трение). Учитывая выражение (17), для частоты и энергии нелинейного колебания вводим фазу колебания  $\psi$  и переписываем (16) в виде:

$$Q = 2 \operatorname{arcsin} \left[ \sqrt{\frac{E}{E_0}} \operatorname{sn} \left\{ \frac{2}{\pi} K \left( \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right) \psi, \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right\} \right], \quad (21)$$

$$\text{где } \tilde{k} = \sqrt{\frac{E}{E_0}}, \psi = \tau, \frac{2}{\pi} K \left( \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right) \psi \equiv \sqrt{\alpha_2} \tau, \varphi \equiv Q,$$

Для определения скорости изменения энергии в системе со временем необходимо вычислить производную:  $\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{dQ}{d\psi}$ . Тогда:

$$Q_\psi = \frac{4}{\pi} \tilde{k} K \operatorname{cn} \left( \frac{2}{\pi} K \psi, \tilde{k} \right), \quad (22)$$

где  $\operatorname{cn}(u, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k)}$  – эллиптический косинус Якоби.

Используя методы Ван-дер-Поля и Крылова-Боголюбова в случае нелинейного порождающего уравнения [10] для скорости изменения энергии получим:

$$\frac{dE}{d\tau} = -2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\tilde{k}^2}{K} \int_0^{2K} \operatorname{cn}^2 z dz = -4\alpha_1 \alpha_2 \left[ \frac{E(\tilde{k})}{K(\tilde{k})} - 1 + \tilde{k}^2 \right], \quad (23)$$

где  $E(\tilde{k})$  – полный эллиптический интеграл второго рода.

Для малоамплитудных нелинейных собственных колебаний системы ( $\tilde{k} \ll 1$ ) полагаем  $\frac{E(\tilde{k})}{K(\tilde{k})} \approx 1 - \frac{\tilde{k}^2}{2}$ , тогда соотношение (23) определяет скорость диссипации энергии, вытекающую из (17), а именно:

$$\frac{dE}{d\tau} = -\alpha_1 E. \quad (24)$$

Однако экспоненциально медленное убывание энергии происходит только в линейном режиме колебаний. В обратном предельном случае ( $\tilde{k} \rightarrow 1$ ), когда исходная энергия математического (нелинейного) маятника близка к  $E_0$ , диссипация происходит по другому закону. В этом случае

$$K(\tilde{k}) \approx -\frac{1}{2} \ln(1 - \tilde{k}^2), E(\tilde{k}) \approx 1, \text{ и имеем:}$$

$$\frac{dE}{d\tau} \approx \frac{8\alpha_1\alpha_2}{\ln \frac{E_0 - E}{E_0}}. \quad (25)$$

Решая это уравнение (25) приближенно, получаем следующее соотношение:

$$E \approx E_0 [1 - 4\alpha_1 (t - \tau_0)], \quad (26)$$

где  $\tau_0$  – произвольная константа интегрирования. Таким образом, энергия системы линейно убывает на начальном этапе диссипации.

**В.** Численное решение (11) для произвольных значений  $\alpha_{1,2,3}$ .

Ниже на рис. 2 представлены зависимости  $\varphi(\tau)$ ,  $\varphi_\tau(\tau)$ ,  $\varphi_{\tau\tau}(\tau)$  и фазовые портреты  $(\varphi, \varphi_\tau)$ ;  $(\varphi_\tau, \varphi_{\tau\tau})$ ;  $(\varphi, \varphi_{\tau\tau})$  полученные при численном решении на ЭВМ уравнения (11) для разных сочетаний  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  параметров.

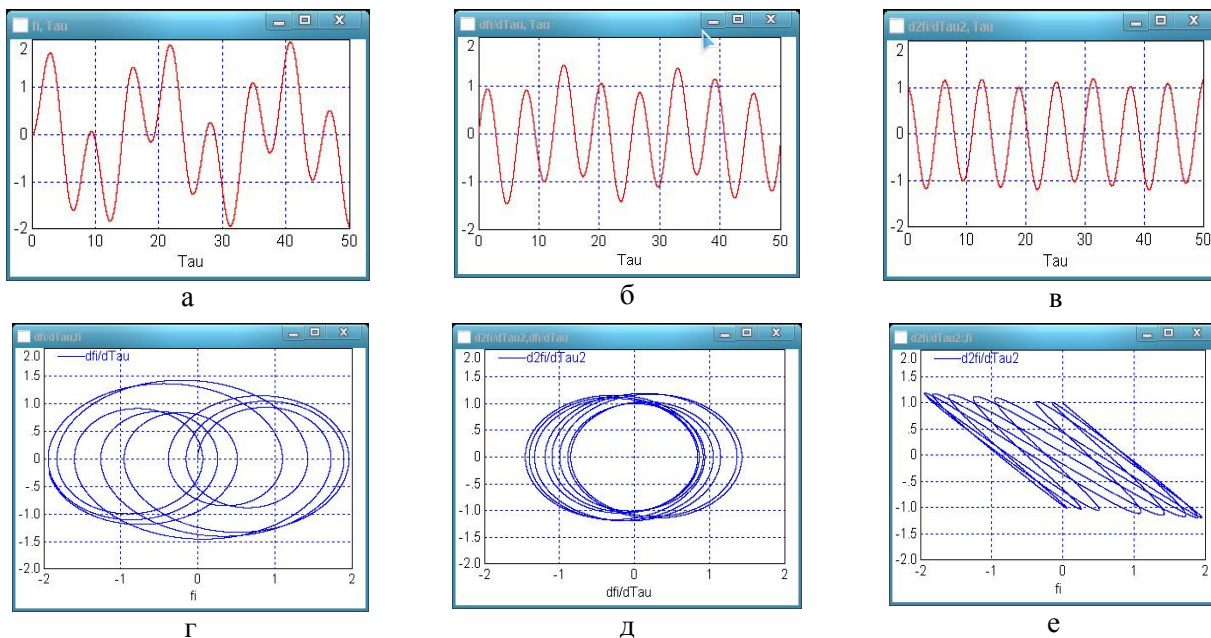


Рис. 2. Зависимости  $\varphi(\tau)$ ,  $\varphi_\tau(\tau)$ ,  $\varphi_{\tau\tau}(\tau)$  (а, б, в) и соответствующие фазовые портреты (г, д, е)



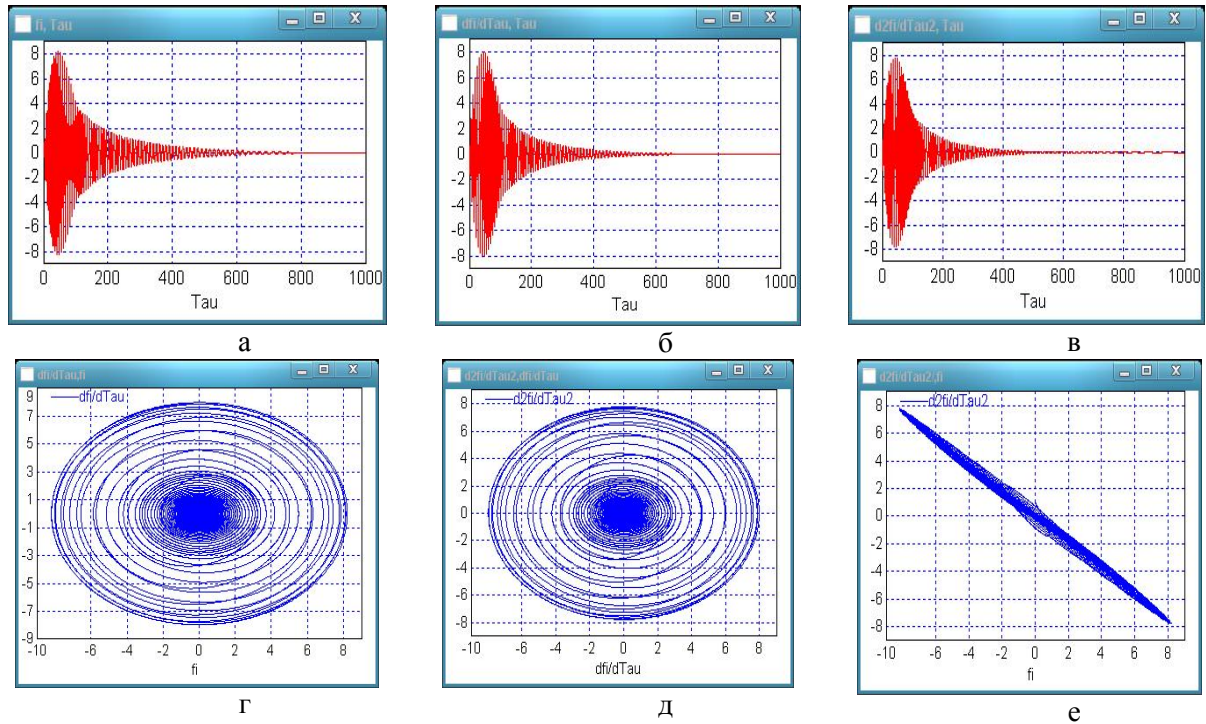


Рис. 3. Зависимости  $\tilde{\varphi}(\tau)$ ,  $\tilde{\varphi}'(\tau)$ ,  $\tilde{\varphi}''(\tau)$  (а, б, в) и соответствующие фазовые портреты (г, д, е)

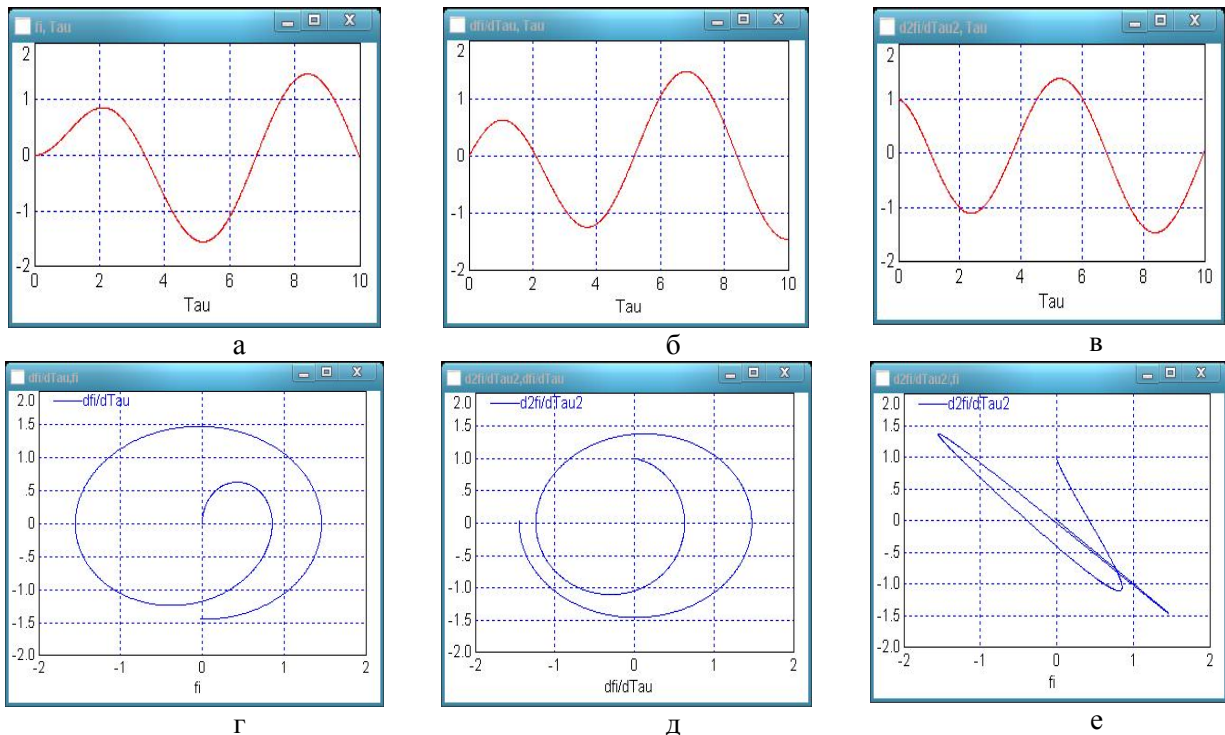


Рис. 4. Зависимости  $\tilde{\varphi}(\tau)$ ,  $\tilde{\varphi}'(\tau)$ ,  $\tilde{\varphi}''(\tau)$  (а, б, в) и соответствующие фазовые портреты (г, д, е)

Анализ приведенных графиков (рис. 2 – 4) показывает, что для некоторых из комбинаций параметров  $(\alpha_{1,2,3})$  система описываемая (11) уравнением ввергается в состояние динамического хаоса и становится неуправляемой. В тех случаях, когда фазовые портреты  $(\varphi, \varphi')$ ,  $(\varphi', \varphi'')$  описываются замкнутыми кривыми, система пребывает в режимах периодических нелинейных

© Човнюк Ю.В., Герасимчук Г.А., Гуменюк Ю.О., Диктерук М.Г.

колебаний, затухающих со временем  $t$ . Если фазовый портрет  $(\varphi, \dot{\varphi}_{tt})$  представляет собой прямую линию (или близкую к ней кривую) – это означает, что частота системы близка к постоянной величине. В данном случае под частотой понимаем ту, с которой происходят вынужденные колебания системы (поскольку собственные с течением времени  $t$  затухают).

Во всех вариантах расчетов выбирались начальные условия вида:  $\varphi|_{t=0} = 10^{-6}$ ;  $\dot{\varphi}_{tt}|_{t=0} = 10^{-6}$ . Значения  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  в большинстве случаев выбирались из множества  $\alpha_{2,3} = \{0,1; 1; 10\}$ . Значение  $\alpha_1$  выбирались из множества  $\{0,01; 0,1; 1\}$ .

#### Выводы

1. Обоснована модель математического маятника для анализа нелинейных колебаний станков, предназначенных для динамической балансировки.
2. Получены точные аналитические и приближенные решения, описывающие свободные нелинейные колебания маятника, а также с помощью ЭВМ численные решения для вынужденных видов колебаний описываемой системы. Построены соответствующие им фазовые портреты (классический и высших порядков). Проведен их анализ.
3. Полученные в работах результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчета балансировочных станков как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

#### Список використаних джерел

1. Штейнвольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов. /Л.И. Штейнвольф. –М., К.:Машгиз, 1961.– 340 с.
2. Андронов А.А. Теория колебаний./ А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.– М.: Наука, 1981.– 568 с.
3. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем/ О.Блэкьер.– М.: Мир,1969. –400с.
4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963.– 410с.
5. Ландау Л.Д. Механика./ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука,1965.– 203с.
6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики/ Н.Н. Моисеев.– М.: Наука, 1969.– 377с.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений/ А. Найфэ.– М.: Мир, 1984.– 535 с.
8. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа/ Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. - М.: Физматгиз, 1963.– Ч.2.– 515с.
9. Янке Е. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы/ Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. М. Лёш.– М.: Наука, 1964.– 344с.
10. Косевич А.М. Введение в нелинейную физическую механику/ А.М.Косевич, А.С. Ковалев.– К: Наукова думка, 1989. – 304 с.