УДК 519.64(045)
В.Ю. Середа, професор
Луцький національний технічний університет

ПРО МОДИФІКАЦІЮ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ

Середа В.Ю. Про модифікацію узагальненого методу розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду. В роботі розглядається модифікація узагальненого методу розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду. Суть її полягає в тому, що область визначення ядра розбивається на скінченну кількість прямокутників і на кожному з них рівняння розв'язується узагальненим методом. Виводиться апріорна оцінка похибки методу.

Ключові слова: рівняння, інтегральне рівняння, оцінка похибки, параметр, метод.
Форм. 37. Літ. 4.

Середа В.Ю. О модификации обобщенного метода решения интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. В работе рассматривается модификация обобщенного метода решения линейных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. Суть ее заключается в том, что область определения ядра разбивается на конечное число прямоугольников и на каждом из них уравнение решается обобщенным методом. Выводится априорная оценка погрешности метода.

Ключевые слова: уравнение, интегральное уравнение, оценка погрешности, параметр, метод.

Sereda V. Modification of the generalized method of solving of integral equations of Fredholm type of the second kind. The paper considers a modification of the generalized method of solving of linear integral equations of Fredholm type of the second kind. Its essence is that the domain of the core is divided into finite number of rectangles and on each of these the equation is solved by generalized method. Apriori estimation of error of the methods is deduced.

Keywords: equation, integral equation, estimation of error, parameter, method.

Постановка проблеми. Лінійні та нелінійні інтегральні рівняння є математичними моделями багатьох задач математичної фізики, механіки і техніки. Тому проблема пошуку оптимальних методів їх розв'язання була і є актуальною в даний час. Оскільки інтегральні рівняння, як правило, розв'язуються наближено, то зусилля математиків були і є зосередженими на пошуку оптимальних методів їх наближеного розв'язання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Початок цим методам був покладений ще в роботах Фредгольма [1;2], Шмідта, Гурса і Ністрема вкінці XIX століття. В зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки почали розвиватись наближені методи розв'язання інтегральних рівнянь. Детальний аналіз цих методів зроблений в статті автора [3].

Аналізуючи наближені методи розв'язання рівнянь типу Фредгольма, можна стверджувати, що вони розвивалися в напрямах розширення області застосування цих методів і в отриманні зручної і ефективної методики обчислення похибки одержаного результату.

Мета дослідження полягає в побудові модифікації узагальненого методу розв'язання рівнянь вищенаведеного виду, основи якого викладені в статті автора [3], яка дає можливість розширити область застосування цього методу і одержувати результати з більшою точністю.

Основні результати досліджень.

Для розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = P_0(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds, \tag{1}$$

де $\varphi(x)$ – шукана, $P_0(x)$, $K(x,s)$ – задані функції деякого класу (класу C, L_2 або L_p) відповідно в областях $a \le x \le b$ і $a \le x, s \le b$, λ – параметр рівняння, a,b – скінченні або нескінченні межі інтегрування, автором був запропонований узагальнений метод [3]. При цьому область інтегрування $a \le x, s \le b$ розглядалась як суцільний квадрат. Проте, в багатьох випадках ефективність методу підвищується, якщо область інтегрування поділити на m прямокутників прямими, паралельними осі OX: $s = s_k \left(k = \overline{0,m}, s_0 = a; s_m = b\right)$ і в кожному з таких прямокутників ядро $K(x,s)$ рівняння (1) представити у вигляді суми двох ядер – виродженого і „малого", як це робилось в [3]:

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{m}K_k(x,s)+D(x,s), \qquad (2)$$

$$K_k(x,s)=\sum_{i=1}^{n_k}P_{ik}(x)Q_{ik}(s) \qquad (3)$$

при $s_{k-1}\le s\le s_k$, $k=\overline{1,m}$, де n_k – кількість членів апроксимації ядра на k-му прямокутнику (для кожного прямокутника це число, взагалі кажучи, різне).

Розв’язок $\varphi(x)$ інтегрального рівняння (1) шукається у вигляді

$$\varphi(x)=M_0(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}M_{ik}(x), \qquad (4)$$

де $$\alpha_{ik}=\int_{s_{k-1}}^{s_k}Q_{ik}(s)\varphi(s)\,ds \quad \left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m};\ n=\max\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}\right), \qquad (5)$$

а $M_{ik}(x)$ – невідомі функції. Для їх визначення підставимо вираз (4) в (1) і, враховуючи (2), проведемо деякі тотожні перетворення

$$M_0(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}M_{ik}(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{m}K_k(x,s)+D(x,s)\right)\cdot\left(M_0(s)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}M_{ik}(s)\right)ds=$$

$$=P_0(x)+\lambda\int_a^b D(x,s)M_0(s)\,ds+\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\int_a^b D(x,s)M_{ik}(s)\,ds+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}P_{ik}(x)\int_{s_{k-1}}^{s_k}Q_{ik}(s)\left(M_0(s)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}M_{ik}(s)\right)ds=$$

$$=P_0(x)+\lambda\int_a^b D(x,s)M_0(s)\,ds+\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\int_a^b D(x,s)M_{ik}(s)\,ds+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}P_{ik}(x). \qquad (6)$$

Прирівнюючи в (6) відповідні вирази, які стоять при α_{ik} і вільні члени, одержимо $n\cdot m+1$ лінійних інтегральних рівнянь

$$M_0(x)=P_0(x)+\lambda\int_a^b D(x,s)M_0(s)\,ds, \qquad (7)$$

$$M_{ik}(x)=P_{ik}(x)+\lambda\int_a^b D(x,s)M_{ik}(s)\,ds \quad \left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}\right)$$

з одним і тим же „малим“ ядром $D(x,s)$.

Як відомо, рівняння (7) легко розв’язуються наближеними ітераційними методами при достатній малості величини

$$q=|\lambda|\sqrt{\int_a^b\int_a^b D^2(x,s)\,dxds}<1. \qquad (8)$$

В цьому методі цього завжди можна досягнути як збільшенням $n_k\left(k=\overline{1,m}\right)$, тобто кількості членів апроксимації на прямокутниках $s_{k-1}\le s\le s_k\left(k=\overline{1,m}\right)$, так і шляхом подрібнення області $a\le x,s\le b$, тобто збільшенням кількості прямокутників.

Розв’язавши рівняння (7) і враховуючи співвідношення (5), для визначення параметрів α_{ik} в (4) одержуємо систему $n\cdot m$ лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\vec{\alpha}=\vec{b}. \qquad (9)$$

де
$$A = E - \lambda C, \tag{10}$$
E – одинична матриця, C – nm-квадратна матриця з елементами
$$C_{ik,rs} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s) M_{rs}(s)\,ds \quad \left(i, r = \overline{1,n};\ k, s = \overline{1,m}\right), \tag{11}$$
$\vec{\alpha} = \{\alpha_{ik}\}$, $\vec{b} = \{b_{ik}\}$ – nm-компонентні вектори,
$$b_{ik} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s) M_0(s)\,ds \quad \left(s_{k-1} \le s \le s_k,\ k = \overline{1,m}\right). \tag{12}$$

Покажемо, що якщо функції $M_0(x)$ і $M_{ik}(x)$ є розв'язками рівнянь (7), а параметри $\alpha_{ik}\ \left(i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m}\right)$ визначаються з системи алгебраїчних рівнянь (9), то функція $\varphi(x)$, визначена рівністю (4), дійсно є розв'язком рівняння (1).

Дійсно, підставляючи (4) в (1), одержимо:
$$\varphi(x) - P_0(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = M_0(x) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}M_{ik}(x) - P_0(x) -$$
$$-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{m}K_k(x,s) + D(x,s)\right]\cdot\left[M_0(s) + \lambda\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\alpha_{rs}M_{rs}(s)\right]ds =$$
$$= P_0(x) + \lambda\int_a^b D(x,s)M_0(s)\,ds + \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}P_{ik}(x) + \lambda^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\int_a^b D(x,s)M_{ik}(s)ds -$$
$$-P_0(x) - \lambda\int_a^b\sum_{k=1}^{m}K_k(x,s)M_0(s)\,ds - \lambda\int_a^b D(x,s)M_0(s)\,ds - \lambda^2\int_a^b\sum_{k=1}^{m}K_k(x,s)\cdot\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\alpha_{rs}M_{rs}(s) -$$
$$-\lambda^2\int_a^b\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}D(x,s)\cdot\alpha_{ik}M_{ik}(s)ds = \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}P_{ik}(x) - \lambda\int_a^b\sum_{k=1}^{m}K_k(x,s)M_0(s)\,ds -$$
$$-\lambda^2\int_a^b\sum_{k=1}^{m}K_k(x,s)\cdot\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\alpha_{rs}M_{rs}(s) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}P_{ik}(x) -$$
$$-\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_{s_{k-1}}^{s_k}P_{ik}(x)Q_{ik}(s)\cdot\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\alpha_{rs}M_{rs}(s)ds - \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_{s_{k-1}}^{s_k}P_{ik}(x)Q_{ik}(s)M_0(s)\,ds =$$
$$= \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}P_{ik}(x)\left[\alpha_{ik} - \lambda\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{s_{k-1}}^{s_k}Q_{ik}(s)M_{rs}(s)\,ds - \int_{s_{k-1}}^{s_k}Q_{ik}(s)M_0(s)\,ds\right].$$

Вираз, який стоїть у квадратних дужках, є ні що інше, як система алгебраїчних рівнянь (9), яку задовольняють параметри α_{ik}. Значить, цей вираз дорівнює нулю і, отже,
$$\varphi(x) - P_0(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = 0,$$
тобто функція (4) дійсно є розв'язком рівняння (1).

Зауваження. Оскільки кількість членів апроксимації ядра на кожному з m прямокутників береться, взагалі кажучи, різною, а $n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$, то $P_{ik}(x) = Q_{ik}(s) \equiv 0$ при $i > n_k\ \left(k = \overline{1,m}\right)$ і, отже, $\alpha_{ik} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s)\varphi(s)\,ds = 0$

Звідси випливає, що порядок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9) зменшується і дорівнює $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Кількість обчислювальної роботи при цьому також відповідно зменшується.

Розглянемо тепер питання про оцінку похибки наближеного розв'язання рівняння (1) запропонованим методом (наприклад, в просторі функцій C) в тому випадку, коли допоміжні рівняння (7) розв'язуються яким-небудь методом наближено.

Тоді замість функцій $M_0(x)$ і $M_{ik}(x)$ $\left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}\right)$ одержимо їх наближення, відповідно, $M_0^*(x)$ і $M_{ik}^*(x)$ і, отже, замість параметрів α_{ik} $\left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}\right)$ будуть параметри

$$\alpha_{ik}^* = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s)\varphi^*(s)\,ds = 0\,, \tag{13}$$

де
$$\varphi^*(x) = M_0^*(x) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^* M_{ik}^*(x) - \tag{14}$$

наближений розв'язок даного рівняння (1).

Параметри α_{ik}^* знаходяться з системи

$$A^*\vec{\alpha}^* = \vec{b}^*, \tag{15}$$

де
$$A^* = E - \lambda C^*, \tag{16}$$

E – одинична матриця, $C^* = \left\{c_{ik,rs}^*\right\}$ – $n\cdot m$-квадратна матриця з елементами

$$c_{ik.rs}^* = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s)M_{rs}^*(s)\,ds\,, \tag{17}$$

$\vec{\alpha}^* = \left\{\alpha_{ik}^*\right\}$, $\vec{b}^* = \left\{b_{ik}^*\right\}$ – $n\cdot m$-компонентні вектори, причому

$$b_{ik}^* = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s)M_0^*(s)\,ds \quad \left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}\right), \tag{18}$$

а α_{ik}^* виражається рівністю (13).

Для оцінки похибки методу скористаємось співвідношеннями (4) і (14), згідно з якими

$$\left\|\varphi(x)-\varphi^*(x)\right\| \le \left\|M_0(x)-M_0^*(x)\right\| + |\lambda|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\left|\alpha_{ik}^*\right|\cdot\left\|M_{ik}(x)-M_{ik}^*(x)\right\| + \left\|M_{ik}(x)\right\|\cdot\left|\alpha_{ik}-\alpha_{ik}^*\right|\right]$$

або, ввівши позначення

$$\left\|M_0(x)-M_0^*(x)\right\| = r_0\,,\quad \left\|M_{ik}(x)-M_{ik}^*(x)\right\| = r_{ik}\,, \tag{19}$$

$$\left\|\varphi(x)-\varphi^*(x)\right\| \le r_0 + |\lambda|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\left|\alpha_{ik}^*\right|\cdot r_{ik} + \left\|M_{ik}(x)\right\|\cdot\left|\alpha_{ik}-\alpha_{ik}^*\right|\right]. \tag{20}$$

Визначимо або оцінимо всі величини, які входять у праву частину нерівності (20).

Оцінки величин r_0 і r_{ik} $\left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}\right)$ тут відомі при розв'язанні рівнянь (7) конкретним наближеним методом.

Величини $\left|\alpha_{ik}^*\right|$ відомі в результаті розв'язання системи (15) або можуть бути оцінені нерівностями

$$\left|\alpha_{ik}^*\right| \le \left\|\vec{\alpha}^*\right\|_1 \le N\cdot\left\|\vec{b}^*\right\|_1 \le Nq_{ik}\left\|M_0^*(x)\right\|, \tag{21}$$

де
$$q_{ik} = \int_{s_{k-1}}^{s_k}\left|Q_{ik}(s)\right|ds\,, \tag{22}$$

$$N = \left\|\left(A^*\right)^{-1}\right\|_1\,. \tag{23}$$

Оскільки для кожного з рівнянь (7) виконується нерівність (8), то для оцінки величин $\left\|M_{ik}(x)\right\|$ $\left(i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}\right)$, згідно з [4]. Згідно з [4] знаходимо, що

$$\left\|M_{ik}\left(x\right)\right\| \le \frac{R_{ik}}{1-q}\cdot q + \left\|P_{ik}\left(x\right)\right\|, \tag{24}$$

де
$$R_{ik} = \frac{\left|\lambda\right|}{q}\left\|\sqrt{\int_a^b \left|P_{ik}\left(x\right)\right|^2 dx \int_a^b \left|D\left(x,s\right)\right|^2 ds}\right\|. \tag{25}$$

а
$$q = \left|\lambda\right|\sqrt{\int_a^b\int_a^b D^2\left(x,s\right)dxds}\ .$$

Нарешті, для оцінки величин $\left|\alpha_{ik} - \alpha_{ik}^*\right|$ $\left(i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m}\right)$, скориставшись системами (9) і (15), одержимо:

$$A^*\left(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*\right) = \vec{f} + \lambda\left(C - C^*\right)\left(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*\right), \tag{26}$$

де A^* – матриця (16), а $\vec{f}$ – $n \cdot m$-компонентний вектор

$$\vec{f} = \vec{b} - \vec{b}^* + \lambda\left(C - C^*\right)\vec{\alpha}^*, \tag{27}$$

Згідно з (26)

$$\left|\alpha_{ik} - \alpha_{ik}^*\right| \le \left\|\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*\right\|_1 \le \frac{N\left\|\vec{f}\right\|_1}{1 - \left|\lambda\right|\cdot N\cdot\left\|C - C^*\right\|_1}. \tag{28}$$

Оскільки
$$\left|b_{ik} - b_{ik}^*\right| \le \int_{s_{k-1}}^{s_k}\left|Q_{ik}\left(s\right)\right|\cdot\left\|M_0\left(s\right) - M_0^*\left(s\right)\right\|ds = r_0 q_{ik}, \tag{29}$$

$$\left|c_{ik,rs} - c_{ik,rs}^*\right| \le \int_{s_{k-1}}^{s_k}\left|Q_{ik}\left(s\right)\right|\cdot\left\|M_{rs}\left(s\right) - M_{rs}^*\left(s\right)\right\|ds = r_{rs} q_{ik}, \tag{30}$$

то
$$\left\|C - C^*\right\|_1 \le \gamma Q, \tag{31}$$

де
$$\gamma = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} r_{ik},\ \ Q = \max_{i,k} q_{ik}. \tag{32}$$

Із співвідношень (27), враховуючи (21), (30), (29), (31) і (32), маємо:

$$\left\|\vec{f}\right\|_1 \le r_0 Q + \lambda N Q^2 \gamma\left\|M_0^*\left(x\right)\right\|$$

або
$$\left\|\vec{f}\right\|_1 \le Q\mu, \tag{33}$$

де
$$\mu = r_0 + \left|\lambda\right| N Q \gamma\left\|M_0^*\left(x\right)\right\|. \tag{34}$$

Підставивши замість величин $\left\|\vec{f}\right\|_1$ і $\left\|C - C^*\right\|_1$ в (28) їх оцінки, відповідно (33) і (31), одержимо:

$$\left|\alpha_{ik} - \alpha_{ik}^*\right| \le \frac{NQ\mu}{\Delta}, \tag{35}$$

де
$$\Delta = 1 - \left|\lambda\right| N\gamma Q. \tag{36}$$

Шляхом покращення апроксимації в прямокутниках $s_{k-1} \le s \le s_k$ $\left(k = \overline{1,m}\right)$ або збільшенням кількості їх, або зменшенням r_{ik} $\left(i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m}\right)$, а, отже, і γ, тут завжди можна досягнути виконання умови $\Delta > 0$.

З врахуванням оцінок (21), (24 і (35) з (20) одержуємо:

$$\left\|\varphi\left(x\right) - \varphi^*\left(x\right)\right\| \le \mu\left(1 + \frac{\delta\left|\lambda\right| QN}{\Delta}\right), \tag{37}$$

де
$$\delta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left\| M_{ik}\left(x\right)\right\|.$$

Одержана оцінка є апріорною, поскільки всі величини в правій частині нерівності (37) апріорі відомі.

Якщо, зокрема, рівняння (7) розв'язувати наближено методом послідовних наближень, процес ітерацій якого в силу виконання умови (8) буде збіжним, то після ν_0, ν_{ik} ітерацій для кожного з рівнянь (7) відповідно, одержимо наближення $M_0^*\left(x\right) = M_{0,\nu_0}\left(x\right)$, $M_{ik}^*\left(x\right) = M_{\mathrm{ik},\nu_{ik}}\left(x\right)$ з похибкою (див. [4]) $r_0 \le R_0 \dfrac{q^{\nu_0+1}}{1-q}$, $r_{ik} \le R_{ik} \dfrac{q^{\nu_{ik}+1}}{1-q}$ $\left(i=\overline{1,n};\, k=\overline{1,m}\right)$

і якщо $\nu = \min\left\{\nu_0, \nu_{ik}\right\}$, то згідно з (37)

$$\left\|\varphi\left(x\right) - \varphi^*\left(x\right)\right\| \le L\frac{q^{\nu+1}}{1-q}, \quad \text{де} \quad L = \beta\left(1 + \frac{\left|\lambda\right| NQ\delta}{\Delta}\right),$$

$$\beta = R_0 q^{\nu_0 - \nu} + \left|\lambda\right| NQ\left\|M_0^*\left(x\right)\right\| \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} R_{ik} q^{\nu_{ik}-\nu}.$$

З останньої нерівності випливає, що запропонований метод збігається рівномірно.

Висновки. Таким чином, побудована модифікація узагальненого методу розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду так само, як і узагальнений метод, узагальнює відомі методи послідовних наближень, метод заміни ядра виродженим, ітераційний метод осереднення функціональних поправок і метод смуг; дає можливість розв'язувати рівняння і в тих випадках, коли ці методи не дають результатів; оцінка похибки його має апріорний характер. В порівнянні з узагальненим методом запропонована модифікація підвищує його ефективність.

Список використаних джерел.

1. Fredholm J. Sur une nouvelle methode pour la resolution du probleme de Dirichlet, Kong. Vetenskaps – Akademtes Förh., Stockholm, 1900.
2. Fredholm J. Sur uneclasse d'equations fonctionnelles, Acta Math., 27, 1903.
3. В.Ю. Середа Про методи розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду, Міжвузівський збірник «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». Луцьк, 2011. Випуск №3.
4. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Физматгиз, 1959.