

Л. Г. Грінченко  
 Луцький національний технічний університет

## ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН ТОНКОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛИТИ, ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ НА КОНТУРІ

Л. Г. Грінченко. Поперечний згин тонкої ізотропної прямокутної плити, жорстко закріпленої на контурі. В роботі розглянутий згин тонкої ізотропної прямокутної плити, з певними граничними умовами. Через базові функції і функції форми визначені: функція прогину, кути поворотів нормалей. Проведено числові розрахунки розподілу, прогину та згинних моментів в головних перерізах плити.

**Ключові слова:** плита, напруження, згин.

Л. Г. Грінченко. Поперечный изгиб тонкой изотропной прямоугольной плиты, жестко закрепленной на контуре. В работе рассмотрен изгиб тонкой изотропной прямоугольной плиты, с определенными граничными условиями. Через базовые функции и функции формы определены: функция прогиба, углы поворота нормалей. Проведены числовые расчеты для распределения прогиба и сгинальных моментов в главных разрезах плиты.

**Ключевые слова:** плита, напряжение, изгиб.

L. G. Grinchenko. Transverse bend of thin isotope rectangular plate, rigidly fixed in the contour. In the work is studied the bend of thin isotope rectangular plate, with definite limiting conditions. Through the basic functions and the functions of the form are determined function of deflexion and angles of normal bending. Numerical calculations of distribution, bending and curving moments in main cutting of the plate.

**Keywords:** flag, tension, bend.

Розглянемо тонку прямокутну ізотропну плиту з розмірами в плані  $2a_j$  ( $j = 1, 2$ ) і товщиною  $h$  жорстко закріплену на контурі і завантажену на верхній поверхні сталим навантаженням  $q(x_1, x_2) = q_0$ . Згин такої пластини описується диференціальним рівнянням четвертого порядку [1-4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q_0}{D}; \quad (1)$$

Тут  $w(x_1, x_2)$  – прогин плити;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – її циліндрична жорсткість; де  $E$  і  $\nu$  відповідно модуль Юнга і

коефіцієнт Пуасона матеріалу плити. Моменти  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  в плиті визначаються за формулами:

$$M_{11} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \quad (2)$$

через функцію прогину  $w(x_1, x_2)$ . Для розрахунку напружено-деформованого стану плити необхідно знати функцію прогину  $w(x_1, x_2)$ . Знаходимо її з розв'язку диференціального рівняння (1), задовільнивши при цьому відповідні граничні умови. Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1) шукаємо у вигляді суми

$$w = w_0 + w_* \quad (3)$$

загального розв'язку  $w_0$  однорідного диференціального рівняння: 
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0 \quad (4)$$

і часткового розв'язку  $w_*$  неоднорідного диференціального рівняння (1). Цей розв'язок вибираємо у вигляді:

$$w_* = \frac{q_0 (x_1^2 - a_1^2) \cdot (x_2^2 - a_2^2)}{8D} \quad (5)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (4) шукаємо у вигляді [5]:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_k^{[1]}(x_1) \cos \delta_k^{[2]} x_2 + f_k^{[2]}(x_2) \cos \delta_k^{[1]} x_1 \right] \quad (6)$$

Підставивши вираз (6) до рівняння (4) після розділення змінних приходимо до системи двох незв'язних диференціальних рівнянь  $f_k^{[j]^{(iv)}}(x_j) - 2\delta_k^{[3-j]^{(2)}} f_k^{[j]''}(x_j) + \delta_k^{[3-j]^4} f_k^{[j]}(x_j) = 0, j=1, 2 \quad (7)$

на невідомі функції  $f_k^{[j]}(x_j)$ . Часткові розв'язки даної системи вибираємо у вигляді

$$f_k^{[j]}(x_j) = R_k^{[j]*} \exp(\lambda_k^{[j]} x_j), \quad (8)$$

де  $R_k^{[j]*}, \lambda_k^{[j]}$  невідомі параметри. Підставляючи ці розв'язки до рівнянь (7) отримуємо характеристичні рівняння на

параметри  $\lambda_k^{[j]}$ : 
$$\lambda_k^{[j]^4} - 2\delta_k^{[3-j]^2} \cdot \lambda_k^{[j]^2} + \delta_k^{[3-j]^4} = 0. \quad (9)$$

Корені 
$$\lambda_{(1,2)k}^{[j]} = \delta_k^{[3-j]}; \quad \lambda_{(3,4)k}^{[j]} = -\delta_k^{[3-j]} \quad (10)$$

цих рівнянь є кратні, тому загальний розв'язок однорідного рівняння (4) набуває вигляду:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ R_{1(k)}^{[1]*} \exp(\delta_k^{[2]} x_1) + R_{2(k)}^{[1]*} x_1 \exp(\delta_k^{[2]} x_1) \right] \cos(\delta_k^{[2]} x_2) + \left[ R_{1(k)}^{[2]*} \exp(\delta_k^{[1]} x_2) + R_{2(k)}^{[2]*} x_2 \exp(\delta_k^{[1]} x_2) \right] \cos(\delta_k^{[1]} x_1) \right\} \quad (11)$$

Оскільки розглядувана задача є симетричною то прогин плити повинен бути парною функцією змінних  $x_1, x_2$ . Представимо його у вигляді:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ R_{1(k)}^{[1]*} ch(\delta_k^{[2]} x_1) + R_{2(k)}^{[1]*} x_1 sh(\delta_k^{[2]} x_1) \right] \cos(\delta_k^{[2]} x_2) + \right. \\ \left. + \left[ R_{1(k)}^{[2]*} ch(\delta_k^{[1]} x_2) + R_{2(k)}^{[2]*} x_2 sh(\delta_k^{[1]} x_2) \right] \cos(\delta_k^{[1]} x_1) \right\} \quad (12)$$

При збільшенні кількості наближень  $k$  експоненціальні функції суттєво зростають. Тому для кращої можливості проведення числових розрахунків розв'язок (12), нормуємо представивши його у вигляді [6]:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]}(x_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]}(x_1) \right] C_k^{[2]}(x_2) + \right. \\ \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) \right] \cdot C_k^{[1]}(x_1) \right\}, \quad (13)$$

де

$$\Phi_{1(k)}^{[j]}(x_j) = \frac{ch(\delta_k^{[3-j]} x_j)}{\exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)}; \quad \Phi_{2(k)}^{[j]} = \frac{x_j}{a_j} \cdot \frac{sh(\delta_k^{[3-j]} x_j)}{\exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)} \quad (14)$$

$$\tilde{R}_{1(k)}^{[j]} = R_{1(k)}^{[j]*} \exp(\delta_k^{[3-j]} a_j); \quad \tilde{R}_{2(k)}^{[j]} = R_{2(k)}^{[j]*} \cdot a_j \exp(\delta_k^{[3-j]} a_j); \\ C_k^{[j]}(x_j) = \cos(\delta_k^{[3-j]} x_j); \quad \delta_k^{[j]} = \frac{(2k-1)\pi}{2a_j}; \quad \delta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}. \quad (15)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) отримуємо за формулою (3), враховуючи співвідношення (5), (13). Подамо його в безрозмірних величинах

$$w = \frac{q_0 a_1^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]}(x_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]}(x_1) \right] C_k^{[2]}(x_2) + \right. \\ \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) \right] C_k^{[1]}(x_1) + \frac{(x_1^2/a_1^2 - 1)(x_2^2/a_2^2 - 1)}{8} \right\}. \quad (16)$$

Диференціюючи функцію прогину  $w(x_1, x_2)$  по змінних  $x_1, x_2$  отримуємо вирази на кути поворотів нормалей до серединної поверхні плити після деформації

$$\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{q_0 a_1^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]'}(x_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]'}(x_1) \right] C_k^{[2]}(x_2) + \right. \\ \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) \right] C_k^{[1]'}(x_1) + \frac{x_1(x_2^2/a_2^2 - 1)}{4} \right\}. \quad (17)$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{q_0 a_1^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]}(x_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]}(x_1) \right] C_k^{[2]'}(x_2) + \right. \\ \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]'}(x_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]'}(x_2) \right] C_k^{[1]}(x_1) + \frac{x_2(x_1^2/a_1^2 - 1)a_2^2}{4a_1^2} \right\}. \quad (18)$$

$$\text{Невідомі сталі } x_j = \pm a_j \text{ маємо граничні умови: } w \Big|_{x_i = a_i} = 0; \quad \varphi_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \Big|_{x_i = a_i} = 0; \quad (19)$$

де  $\varphi_i(x_i)$  кут повороту грані  $x_i = a_i$ .

Для зручності обчислень запишемо отримані співвідношення в безрозмірних змінних

$$w = \frac{q_0 a_1^4}{D} \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ R_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + R_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right. \\ \left. + \left[ R_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1) \right\} + \frac{q_0 \cdot a_2^2 (\xi_1^2 - 1)(\xi_2^2 - 1)}{8a_1^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} = \left( \frac{q_0 a_1^4}{D} \right) \left[ \frac{1}{a_1} \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]'}(\xi_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]'}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]'}(\xi_1) \right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2} (\xi_2^2 - 1) 2\xi_1 \cdot \frac{1}{a_1} \right]; \quad (20)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = \left( \frac{q_0 a_1^4}{D} \right) \left[ \frac{1}{a_2} \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]'}(\xi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1) \right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2} (\xi_1^2 - 1) 2\xi_2 \cdot \frac{1}{a_2} \right];$$

де:  $R_{1(k)}^{[j]} = \frac{\tilde{R}_{1(k)}^{[j]}}{\left( \frac{q_0 a_1^4}{D} \right)}$ ;  $R_{2(k)}^{[j]} = \frac{\tilde{R}_{2(k)}^{[j]}}{\left( \frac{q_0 a_1^4}{D} \right)}$ ;

$$\Phi_{1(k)}^{[j]}(\xi_j) = \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] + \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right]; \quad (21)$$

$$\Phi_{2(k)}^{[j]}(\xi_j) = \frac{1}{2} \xi_j \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] - \frac{1}{2} \cdot \xi_j \cdot \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right];$$

$$\Phi_{1(k)}^{[j]'}(\xi_j) = \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] \cdot \delta_k \frac{a_j}{a_{3-j}} - \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right] \delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}};$$

$$\Phi_{2(k)}^{[j]'}(\xi_j) = \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] + \frac{1}{2} \xi_j \cdot \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] \delta_k \frac{a_j}{a_{3-j}} - \quad (22)$$

$$- \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right] + \frac{1}{2} \xi_j \cdot \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right] \delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}};$$

Підставляючи вирази (17), (18), (20) до граничних умов  $w|_{\xi_1=1} = 0$ ;  $\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} |_{\xi_1=1} = 0$ ;

$$w|_{\xi_2=1} = 0; \quad \varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} |_{\xi_2=1} = 0; \quad (23)$$

і враховуючи, що  $C_k^{[1]}(1) = C_k^{[2]}(1) = 0$  отримуємо систему  $2k + 2$  алгебраїчних рівнянь на невідомі коефіцієнти  $\tilde{R}_{\nu(k)}^{[j]}$ ,

$$\nu = 1, 2 \quad \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(1) = 0;$$

$$\tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(1) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]'}(1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]'}(1) \right] \cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right. \quad (24)$$

$$\left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]'}(1) \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^2} (\xi_2^2 - 1) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]'}(1) + \right.$$

$$\left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]'}(1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]'}(1) \right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1) \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^2} (\xi_1^2 - 1) = 0;$$

З перших  $2k$  рівнянь системи (24) знаходимо:

$$R_{2(k)}^{[j]} = - \frac{\Phi_{1(k)}^{[j]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[j]}(1)} R_{1(k)}^{[j]} \quad ; \quad (25)$$

Підставляючи ці зв'язки до інших двох рівнянь даної системи отримуємо систему двох рівнянь зі змінними коефіцієнтами на визначення невідомих коефіцієнтів  $R_{1(k)}^{[1]}$ ,  $R_{2(k)}^{[2]}$

$$\sum_{k=1}^K \left\{ R_{1(k)}^{[1]} \left[ \Phi_{1(k)}^{[1]'}(1) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)} \Phi_{2(k)}^{[1]'}(1) \right] \cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right. \quad (26)$$

$$\left. + R_{1(k)}^{[2]} \left[ \Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[2]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[2]}(1)} \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]'}(1) \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^2} (\xi_2^2 - 1) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^K \left\{ R_{1(k)}^{[1]} \left[ \Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)} \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]'}(1) + \right. \\ \left. + R_{1(k)}^{[2]} \left[ \Phi_{1(k)}^{[2]'}(1) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]'}(1) \right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1) \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^2} (\xi_1^2 - 1) = 0; \quad (27)$$

Систему рівнянь (26), (27) розв'язуємо методом колокацій. Для цього проміжок  $\xi_1 \in [0;1]$  та  $\xi_2 \in [0;1]$  розбиваємо на ряд інтервалів довжиною  $\frac{1}{K}$  і записуємо цю систему рівнянь для кожної точки:

$$\xi_1 = 0; \xi_1 = \frac{1}{K}; \xi_1 = \frac{2}{K}; \dots, \xi_1 = \frac{K-1}{K} \text{ та } \xi_2 = 0; \xi_2 = \frac{1}{K}; \xi_2 = \frac{2}{K}; \dots, \xi_2 = \frac{K-1}{K}.$$

Кількість точок колокацій (параметр K) вибираємо так, щоб досягти заданої точності задоволення системи рівнянь (26), (27). В рахунках покладено  $\nu = 0,3$ . Точність задоволення граничних умов перевіряли за максимальним відхиленням від нуля лівих частин рівнянь (26), (27) при відомих уже коефіцієнтах  $R_{\nu(k)}^{[j]}$ , табулюючи їх як функції від  $\xi_1, \xi_2$  з кроком  $H = 0.01$ . В результаті табуляції встановлено, що для десяти точок колокацій ( $K = 10$ ) максимальне відхилення від нуля за абсолютною величиною на всьому інтервалі  $\xi_j \in [-1;1]$  у випадку, коли відношення сторін плити задовільняє умові:  $\frac{a_1}{a_2} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1.0$  для рівняння (26) не перевищує  $9.551644 \cdot 10^{-5}$ , для рівняння (27) не перевищує  $4.864484 \cdot 10^{-5}$ . У випадку відношення  $\frac{a_1}{a_2} = 1.11; 1.25; 1.43; 1.67; 2.00$  максимальне відхилення від нуля за абсолютною величиною для рівняння (26) не перевищує  $4.856289 \cdot 10^{-5}$ , для рівняння (27) не перевищує  $9.549409 \cdot 10^{-5}$ , тобто точність задоволення граничних умов є достатньо висока. Знаючи параметри  $R_{\nu(k)}^{[j]}$  визначаємо прогин  $w(x_1, x_2)$  в кожній точці плити, а маючи функцію прогину за формулами (2) легко знаходимо моменти в плиті. Запишемо вирази для кривин волокон через які визначаються згинні моменти в

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \left( \frac{q_0 a_1^4}{D} \right) \left[ \frac{1}{a_1^2} \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]''}(\xi_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]''}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]''}(\xi_1) \right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2} (\xi_2^2 - 1) 2 \cdot \frac{1}{a_1^2} \right]; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \left( \frac{q_0 a_1^4}{D} \right) \left[ \frac{1}{a_2^2} \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + \tilde{R}_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]''}(\xi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \tilde{R}_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]''}(\xi_2) + \tilde{R}_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]''}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1) \right\} + \frac{a_2^2}{8a_1^2} (\xi_1^2 - 1) 2 \cdot \frac{1}{a_2^2} \right]; \quad (28)$$

де

$$\Phi_{1(k)}^{[j]}(\xi_j) = \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] \cdot (\delta_k)^2 \cdot \left( \frac{a_j}{a_{3-j}} \right)^2 + \frac{1}{2} \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right] (\delta_k)^2 \cdot \left( \frac{a_j}{a_{3-j}} \right)^2; \\ \Phi_{2(k)}^{[j]}(\xi_j) = \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] \delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} + \frac{1}{2} \xi_j \cdot \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 - \xi_j) \right] (\delta_k)^2 \cdot \left( \frac{a_j}{a_{3-j}} \right)^2 + \\ + \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right] \cdot \delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} - \frac{1}{2} \xi_j \exp \left[ -\delta_k \cdot \frac{a_j}{a_{3-j}} (1 + \xi_j) \right] \cdot (\delta_k)^2 \cdot \left( \frac{a_j}{a_{3-j}} \right)^2;$$

проведені числові розрахунки розподілу прогину та згинних моментів в головних перерізах ( $\xi_j = 0$ ) плити. Результат обчислень графічно представлені на рис. 1, 3, 5, 7, 9.

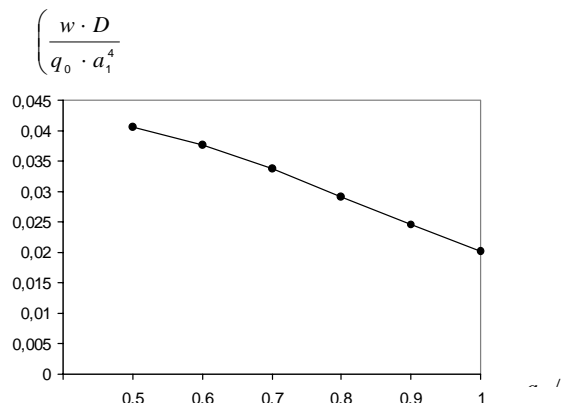


Рис. 1. Зміна максимального прогину плити в залежності від співвідношення її сторін.

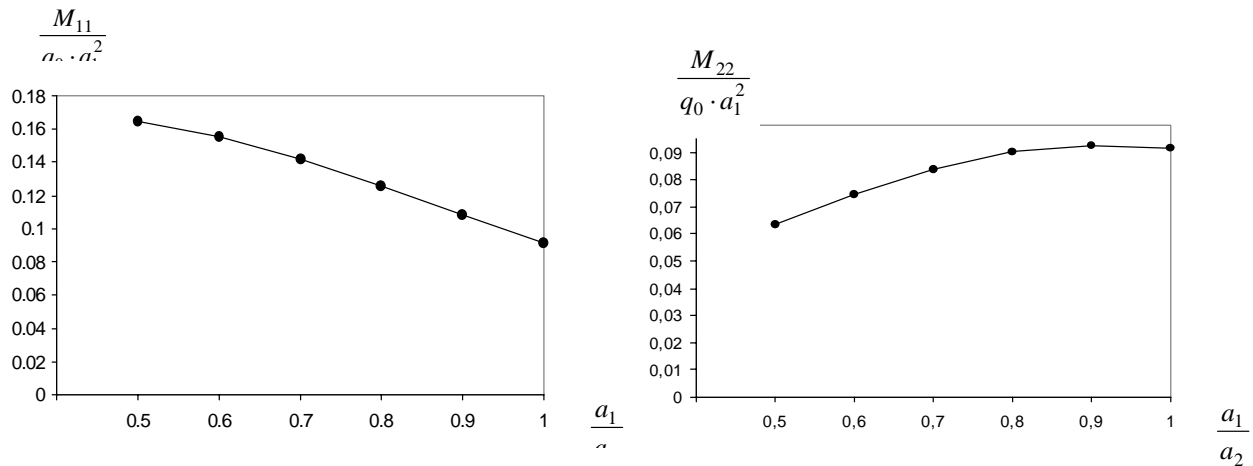


Рис. 2. Зміна максимального згинного моменту  $M_{11} / q_0 a_1^2$  в центрі плити в залежності від співвідношення її сторін. Рис. 3. Зміна максимального згинного моменту  $M_{22} / q_0 a_1^2$  в центрі плити в залежності від співвідношення її сторін.

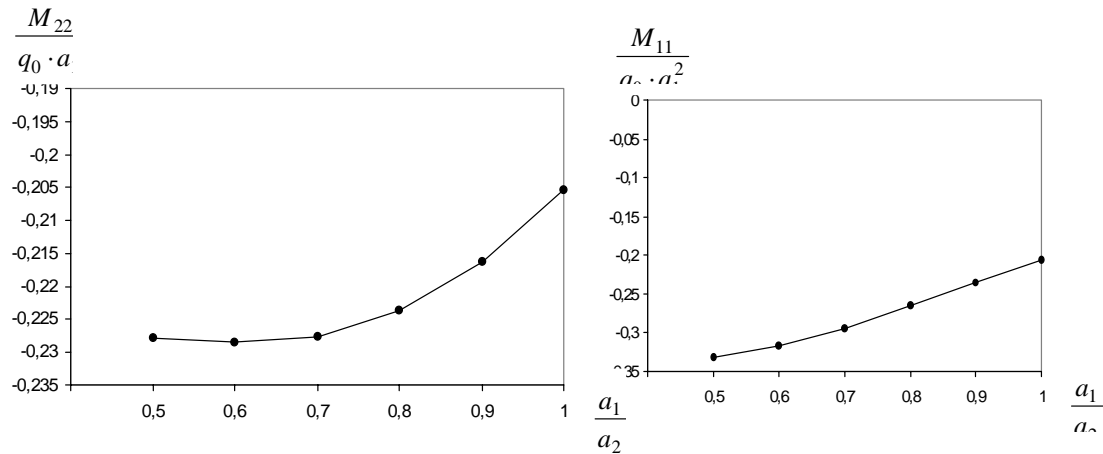


Рис. 4. Зміна максимального згинного моменту  $M_{22} / q_0 a_1^2$  на краю плити ( $x_2 = a_2; x_1 = 0$ ) в залежності від співвідношення її сторін. Рис. 5. Зміна максимального згинного моменту  $M_{11} / q_0 a_1^2$  на краю плити ( $x_1 = a_1; x_2 = 0$ ) в залежності від співвідношення її сторін. На рисунках 1-5 представлені графіки зміни відносних величин прогину  $w$ , та згинних моментів  $M_{11}, M_{22}$  в центрі плити та на її краях в залежності від співвідношення сторін  $a_1 / a_2$ . Залежність максимального прогину плити (в її центрі) від співвідношення  $a_1 / a_2$  ілюструє рисунок 1. Із збільшенням  $a_1 / a_2$  прогин падає і досягає найменшого значення для квадратної плити. Графіки зміни моментів  $M_{11}$  (рис.2) та  $M_{22}$  (рис.3) в центрі плити мають протилежний характер: збільшення  $a_1 / a_2$  приводить до зростання моменту  $M_{22}$  і падіння моменту  $M_{11}$ . Із збільшенням відношення  $a_1 / a_2$  згинний момент  $M_{11}$  на краю плити ( $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ ) суттєво зростає (рис.4) в той же час згинний момент  $M_{22}$  (рис.5) майже не залежить від співвідношення сторін.

**Список використаних джерел.**

1. Тимошенко С.П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки.-М.: Наука, 1966.- 635с.
2. Бережницький Л.Т., Делявський М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин.-Киев: Наукова думка, 1979.- 400с.
3. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит.-Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.- 256 с.
4. Kączkowski Z. Płyty. Obliczenia statyczne.- Warszawa: Arkady, 1980.-
5. Делявський М.В. Расчет напряженного состояния в толстой ортотропной плите под действием изгибающей нагрузки // Пробл. прочности .- № 11-12.- С. 117-123.
6. Delyavskyy M., Gołaś J., Podhorecka A.: O pewnym podejściu do rozwiązywania płyt wielowarstwowych, XLV Konf. Nauk. Krynica 99, s.63-70.