

УДК 539.3:620.179.17

Ю.Я. Матвіїв

Луцький національний технічний університет

## РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ В ОКОЛІ ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНИХ ВКЛЮЧЕНЬ МЕНШОЇ ЖОРСТКОСТІ

**Ю.Я. Матвіїв.** Розподіл напружень у пружній матриці в околі довільно орієнтованих включень меншої жорсткості. За допомогою розрахункової моделі показано характер розподілу напружень у пружній матриці в околі довільно орієнтованих включень з жорсткістю нижчою ніж матриця. Показано, що максимальні напруження в околі порожнини є більшими за відповідні напруження в околі включення тієї ж форми. Це свідчить про те, що некоректно вважати порожнинами включення, жорсткість яких є суттєво меншою ніж матриця. Отримані числовим методом дані добре узгоджуються з результатами аналітичних розрахунків.

**Ключові слова:** напруження, матриця, включення, порожнина, руйнування, акустична емісія.

**Форм. 3. Табл. 2. Рис. 6. Літ. 19.**

**Ю.Я. Матвиив.** Распределение напряжений в упругой матрице в окрестности произвольно ориентированных включений меньшей жесткости. С помощью расчетной модели показан характер распределения напряжений в упругой матрице в окрестности произвольно ориентированных включений с жесткостью более низкой чем матрица. Показано, что максимальные напряжения около полости являются больше соответствующих напряжений возле включения той же формы. Это свидетельствует о том, что некорректно считать полостями включения, жесткость которых является существенно меньше, чем матрица. Полученные числовым методом данные хорошо согласовываются с результатами аналитических расчетов.

**Ключевые слова:** напряжение, матрица, включение, полость, разрушение, акустическая эмиссия.

**Yu. Matviyiv.** Allocation of stress intensity factor in an elastic matrix in the vicinity of sparingly oriented inclusions which rigidity is lower than that of the matrix. Numerical modeling has revealed the distribution of stress in an elastic matrix in the vicinity of a sparingly oriented pores and inclusions which are less rigid than the matrix. The maximum values of stress near the pore are greater than the corresponding stresses in case of inclusions of the same shape. Therefore, even inclusions with rigidity substantially lower than that of matrix could not be considered as pores. The results of numerical modeling agree well with analytical calculations.

**Keywords:** stress intensity, matrix, inclusion, cavity, destruction, accustic emission.

**Постановка проблеми та її зв'язок із важливими практичними завданнями, актуальність проведених досліджень.** У сучасному машинобудуванні, транспорті, будівництві та інших галузях техніки широко використовують різноманітні металеві сплави, які мають значну кількість включень різного походження. Останні сприяють зародженню та розвитку ранніх стадій руйнування у таких конструкційних матеріалах за навантажень, які набагато нижчі від експлуатаційних. Це, у свою чергу, призводить до макроруйнування виготовлених із них деталей чи елементів конструкцій часто набагато швидше, ніж визначено розрахунковим ресурсом їх експлуатування. Ось чому важливо вміти діагностувати руйнування включень у згаданих конструкційних матеріалах з метою запобігання передчасному руйнуванню останніх. Для цього використовують методи неруйнівного контролю, які побудовані на різних фізичних явищах [7].

Міцність і характер руйнування тіл з включеннями залежить від багатьох чинників, зокрема від фізико-механічних характеристик включення і матриці, від форми і розміру включення, а також від міцності зчеплення між компонентами матеріалу. На підставі експериментальних досліджень, присвячених вивченню цієї проблеми, показано, що у процесі деформування тіл з включеннями, здебільшого, початком руйнування (зародження тріщин) є руйнування самого включення [14]. Тому значну зацікавленість представляє вивчення напружено-деформованого стану тіл з включеннями, що призводить до зародження тріщиноутворення.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Суттєвий внесок у розв'язання окреслених науково-технічних задач зробили відомі українські вчені: Ю.Н. Подільчук (розв'язання просторових задач про напружений стан трансверсально-ізотропних тіл з включеннями); О.Є. Андрейків (розв'язання динамічних задач теорії тріщин про руйнування крихких включень); Г.Т. Сулим (оцінка впливу форми включень на концентрацію напружень у твердому тілі); В.П. Силованюк та М.М. Стадник (розв'язання задач про руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл з дефектами типу включень різної форми); В.В. Божидарник (оцінка концентрації напружень навколо включень), а також такі вчені як О.М. Гузь, В.Б. Рудницький, М.В. Делявський, М.Г. Стащук, М.М. Кундрат та багато інших [1-4, 15-17].

**Невирішені питання проблеми та шляхи її розв'язання.** Однак і до нині проблема оцінки

розподілу напружень в околі довільно орієнтованих включень меншої жорсткості не є вирішеною повністю. На її часткове розв'язання направлені дослідження даної праці.

Як показано у працях [5,6,13], на початкових стадіях руйнування пошкоджені області розвиваються всередині матеріалу і локально поширюються у стиснутій зоні зразка, тому виявити їх оптично, як того вимагають методики нормативних документів, неможливо. Після цього, унаслідок злиття мікротріщин у макротріщини, відбувається вихід останніх на бокову поверхню зразка вже після суттєвого розвитку руйнування [13]. Тому для ефективного виявлення його скритих початкових стадій застосовують метод акустичної емісії (АЕ) [6,13]. Наприклад, аналіз одержаних результатів АЕ-контролю, фрактографії і даних літературних джерел дав можливість описати механізми та динаміку процесів руйнування чавунів і сформулювати моделі докритичного розповсюдження у них макротріщин, що супроводжується випромінюванням АЕ. Показано високу ефективність цього методу для оцінки стадій та механізмів руйнування чавунів різноманітної модифікації.

Вже у перших працях, де вивчали АЕ із кристалів, зауважили, що на її генерацію суттєво впливають границі зерен [18]. Для підтвердження цієї гіпотези низка дослідників, вивчаючи проблему руйнування алюмінієвих сплавів, зіставляла експериментальні АЕ-дані для монокристалів алюмінію різної чистоти [19]. Отримані результати часто носили суперечливий характер і не підтверджувалися дослідженнями структури матеріалу. Не дивлячись на те, що силова дія на алюміній та його сплави порівняно з іншими металами та конструкційними сплавами приводить до генерування сигналів АЕ високого рівня, перші теоретичні концепції про зв'язок між дислокаційними явищами і параметрами сигналів, розроблені ще недостатньо повно.

Добрим модельним матеріалом щодо вивчення напруженого стану твердих тіл із включеннями є чавун. Включення графіту у структурі чавуну у літературі прийнято розглядати як внутрішні дефекти відповідних розмірів, форми і розташування, які є концентраторами напружень та місцями зародження і розвитку руйнування. У діагностичному аспекті важливими є задачі визначення геометричних параметрів таких включень. Вирішення їх полягає у розробці нових методів досліджень прямих контактних задач динамічної теорії пружності. Їх теоретична сторона передбачає математичне моделювання динамічної взаємодії складових композиту, яким фактично є чавун, а також розробку числових аналітичних алгоритмів дослідження механічних явищ, які при цьому виникають. Щодо алгоритму розв'язання відповідних обернених задач, то виникають певні труднощі теоретичного та обчислювального характеру, зумовлені нелінійністю та некоректністю обернених, а також недостатнім вивченням прямих задач. Для їх розв'язання найчастіше використовують числові методи.

Метод скінченних елементів достатньо широко застосовують для розв'язання задач механіки руйнування: розрахунку параметрів руйнування для областей різної форми; моделювання процесів руйнування чи поведінки тіл з нерухомою чи ростучою тріщиною в умовах, для яких ще не побудовані адекватні математичні моделі; аналізу міцності реальних конструкцій з точки зору опору крихкому руйнуванню [8].

На сучасному етапі розвитку комп'ютерних технологій існують ефективні програмні комплекси реалізації задач МСЕ, наприклад, ANSYS, FEMLAB, ABAQUSE, NASTRAN тощо.

**Мета дослідження.** На підставі наявних даних провести експериментальні дослідження, в яких з'ясувати характер розподілу напружень у матриці і в околі довільно орієнтованих включень з жорсткістю нижчою, ніж матриця.

**Результати числового розрахунку розподілу напружень у матриці та на включенні.** Розглянемо задачу про руйнування еліпсоїдального включення у суцільному середовищі, описану у праці [16], та спробуємо змоделювати і розрахувати напруження у включенні та його околі та порівняти їх з даними, отриманими з аналітичних залежностей. Напруження у включенні, що діють по нормалі до площини перерізу по великій осі еліпсоїда, визначають за формулою [16]:

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma^{\infty} q [E(k) + 2\beta(1 - \nu^2)]}{2\beta q(1 - \nu^2) + E(k)}, \quad (1)$$

Тут  $q = E_B/E_M$  – відношення модулів Юнга графітового включення і матриці чавуну,  $\beta = b/c$  – відношення довжин півосей еліпсоїда ( $b$  – велика вісь),  $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ ,

$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$  – повний еліптичний інтеграл другого роду,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\sigma^\infty$  – напруження розтягу, що прикладені на нескінченості.

Напруження в околі включення обчислимо за формулою:

$$\sigma_{zz} = \frac{[2\beta(1 - q\nu^2) + E(k)]\sigma^\infty}{2\beta q(1 - \nu^2) + E(k)}, \quad (2)$$

Відзначимо, що узгодження результатів, отриманих за формулами (1) і (2), з відомими даними для еліптичного [9] і сферичного [16] включень свідчить про їх високу точність.

У літературі доволі поширеним є твердження про те, що у чавунах графітові включення можуть розглядатися як порожнини, оскільки їх модуль пружності на порядок менший від модуля пружності металічної матриці. Формула (2) дозволяє оцінити справедливість такого припущення. Зокрема, поклавши  $q = 0$ , знайдемо наближене значення концентрації напружень в околі еліпсоїдальної порожнини за формулою

$$\sigma_{zz} = \frac{[2\beta + E(k)]\sigma^\infty}{E(k)}. \quad (3)$$

У розрахунковій моделі матриці зі сферичним включенням розміри тіла та включення підбирали так, щоб вони були максимально наближені до розмірів реальних включень, а грані тіла суттєво не впливали на розподіл напружень у під час навантаження, оскільки воно є безмежним. Щоб максимально відобразити властивості реального матеріалу і наблизити результати досліджень до конкретних прикладних задач, фізико-механічні характеристики матеріалів включення та матриці поклали такі: *пружне тіло (матриця)*:  $20 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0,3 – коефіцієнт Пуассона;  $7850 \text{ кг/м}^3$  – густина; *включення*:  $1,4 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0,25 – коефіцієнт Пуассона;  $2300 \text{ кг/м}^3$  – густина [1].

Модель тіла та схема навантаження приведені на рис. 1. Розміри тіла вибрали  $120 \times 50 \times 50$  мкм, а в його центрі розмістили пружне еліпсоїдальне включення. Щоби дослідити зміну розподілу напружень у тілі та включенні за переходу від кулеподібної форми до пластинчастої, у процесі експерименту змінювали співвідношення осей включення. Величина півосей початкового включення дорівнює 5 мкм (форму включення міняли на еліпсоїдальну шляхом збільшення однієї осі еліпсоїда у напрямку перпендикулярному напрямку прикладених зусиль навантаження).

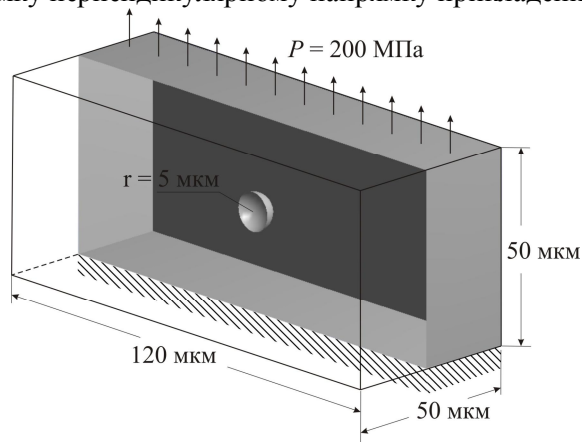


Рис.1

Розбиття тіла проводили з використанням тривимірних скінченних елементів у вигляді тетраедра з 10-ма вузлами. Аналогічне розбиття на скінченні елементи застосовували для включення. Кількість елементів у тілі з наявним включенням та без нього становить 11651 та 11414, відповідно. Математичний розрахунок проводили за допомогою програми ANSYS. Розміри елементів розбиття, що становить 3 мкм, оптимізували так, щоб процес обрахунку не потребував багато часу а результат був стабільним, тобто не був чутливим до зменшення розмірів елементів.

Щоб розрахувати дану модель, нижню грань защемили, тобто її переміщення по осі  $z$   $u_z = 0$ , а до верхньої приклали розподілене навантаження (тут і далі для ілюстрацій прикладів

розрахунку прийматимемо напруження на нескінченості  $\sigma^\infty = 200$  МПа). Отримали розподіл напружень (рис 2,а), який свідчить про те, що навантаження призводить до концентрації максимальних напружень в околі порожнини. Аналогічно змодельовали навантаження тіла з включенням графіту такого ж розміру. Розподіл напружень у ньому показано на рис. 2,б, а результати обчислень наведені у таб. 1.

Розрахунки показують, що максимальні напруження в околі порожнини є більшими за відповідні напруження в околі включення. Це свідчить про те, що некоректно вважати порожнинами включення, жорсткість яких є суттєво меншою ніж матриця.

Щоб перевірити дану методику розрахунку розподілу напружень за наявності включень еліпсоїдальної форми, поступово збільшували параметр  $\beta$  (відношення півосей еліпсоїда:  $a$  – велика вісь,  $c$  – мала вісь), який міняє форму включення з кулеподібної на еліпсоїдальну.

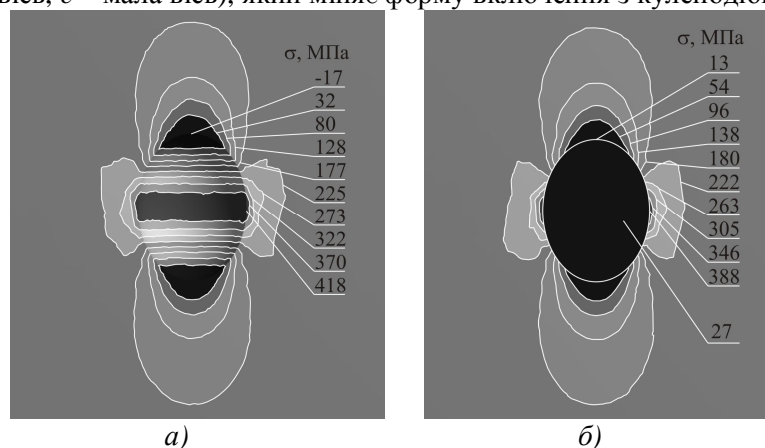


Рис.2

Таблиця 1

Максимальні напруження	Числовий розрахунок, МПа	Розрахунок за формулами (1)-(3), МПа
в околі порожнини	418	455
в околі включення	388	394
у включенні	27	48

Покладемо значення зовнішнього напруження 200 МПа у формули (1)-(3), і вирахуємо напруження, що виникають у тілі в околі кулеподібного включення графіту та порожнини такої ж форми. Дані порівняємо із результатами, отриманими із числового розрахунку аналітичної моделі (таб. 2). Як бачимо, аналітичний розрахунок у матриці та на включенні дає добру збіжність з числовим методом.

Таблиця 2

Співвідношення півосей еліпсоїда $\beta = a/c$	Напруження у включенні, МПа		Напруження в околі включення, МПа	
	Числовий розрахунок	Аналітичний розрахунок	Числовий розрахунок	Аналітичний розрахунок
1	28	48	450	394
2	33	53	459	442
3	35	56	486	460
4	35	56	513	468
5	37	57	542	472
6	38	57	547	475
7	38	58	548	477
8	41	58	551	478
9	42	58	552	479
10	42	58	554	480

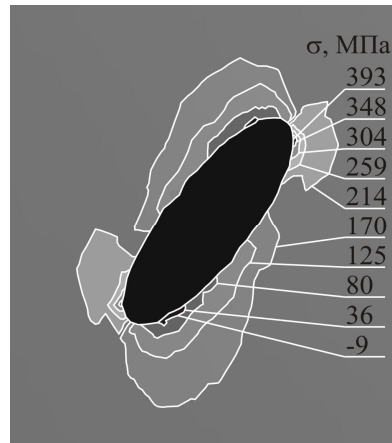


Рис.3

Досліджували також як змінюються напруження у графітовому включенні та його околі за різної орієнтації великої осі до напрямку прикладання сил та зміни співвідношення осей. На рис. 3 зображено розподіл напружень у тілі за орієнтації включення під кутом  $45^\circ$  до напрямку прикладання зусиль розтягу. Напруження, що виникають в околі включення зображені на рис. 4. Як видно, вони збільшуються зі зміною форми включення від кулеподібної до пластинчастої і зменшуються за орієнтації включення з наближенням великої осі до положення, паралельного напрямку розтягу. Як бачимо, чим менші значення  $\beta$ , тим менше змінюються значення максимального напруження під час зміни положення великої осі до напрямку прикладання сил.

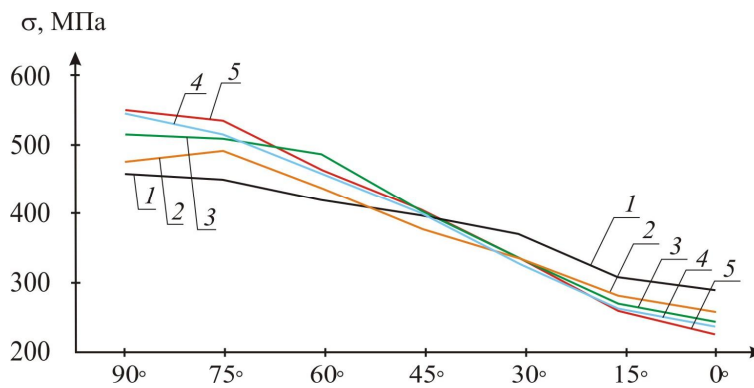


Рис.4

Включення у матеріалі бувають не тільки пластинчасті чи кулеподібні, а можуть приймати форми наближені до призматичних. Зокрема, алюмінієві сплави містять у своїй структурі такі включення [11]. Змоделюємо тіло з призматичним включенням (рис. 5.) та обчислимо розподіл у ньому напружень. Для початку візьмемо включення кубічної форми зі сторонами  $a = b = c = 10$  мкм і помістимо його у центр тіла, розміри та схема навантаження якого аналогічні описаній вище задачі. Фізико-механічні характеристики матеріалів включення та матриці поклали такі: *пружне тіло (матриця)*:  $7,1 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0,33 – коефіцієнт Пуассона (алюмінієвий сплав);  $2770 \text{ кг/м}^3$  – густина; *включення*:  $3 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0,27 – коефіцієнт Пуассона;  $2700 \text{ кг/м}^3$  – густина. Грані включення максимально заокруглені ( $r = 1$  мкм) для зменшення концентрації напружень поблизу них. У процесі дослідження змінювали форму включення через співвідношення сторін  $b/c$  та його орієнтацію у тілі. На рис. 5 проілюстровано розподіл напружень у матриці та у кубічному включенні за орієнтації під кутом  $90^\circ$  двох граней до напрямку прикладання зусиль розтягу.

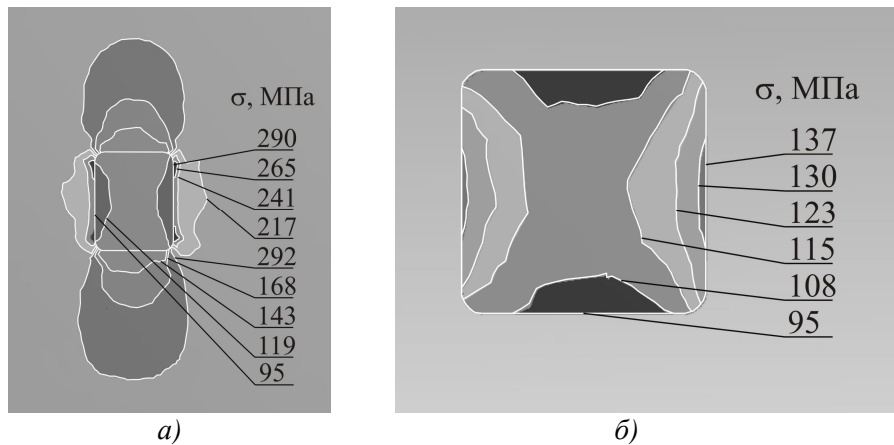


Рис.5

На рис. 6 приведено графік зміни максимальних напружень, що виникають у призматичному включенні за різної орієнтації його великих граней та співвідношення сторін. Як видно, найбільші напруження виникають в околі включення за орієнтації великих граней під кутом  $45^\circ$  до напрямку дії сил.

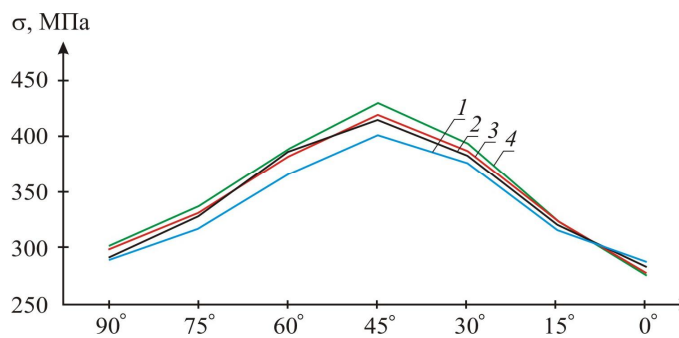


Рис.6

Таким чином, за результатами числових розрахунків отримано кількісний розподіл напружень у матриці і на включенні та показано, що суттєвий вплив на цей розподіл мають форма та розміри включень, їх орієнтація до напрямку прикладання сил.

**Висновки.** За результатами числових розрахунків розподілу напружень розтягу на матриці і крихкому включенні встановлено, що некоректно моделювати останнє порожниною. Для включень еліпсоїдальної форми найсприятливішою для руйнування є орієнтація його великої осі під кутом  $90^\circ$  до напрямку дії сил. Що витягнутіше включення, то схильніше воно до руйнування і сильніше змінює розподіл напружень у залежності до кута прикладання сил. Призматичні включення найчутливіші до зовнішніх розтягуючих напружень під час орієнтації їх великих граней під кутом  $45^\circ$  до напрямку дії навантаження.

Отримані результати дають змогу на якісно новому рівні діагностувати руйнування включень у різноманітних конструкційних матеріалах з метою запобігання передчасному їх руйнуванню.

#### Список використаних джерел.

1. Андрейкив А.Е., Лысак Н.В. Метод акустической эмиссии в исследовании процессов разрушения. – Киев: Наук. думка, 1989. – 176 с.
2. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Концентрация напружень біля тонкого теплопассивного включення // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1992. – Вип. 262. – С. 10–14.
3. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницкий: – 2006. – 710 с.
4. Кундрат Н.М. Отслоение включения в ортотропной композиции // Прикл.механика. – 2000. – 36, №9. – С. 123–128.
5. Лысак Н.В., Скальський В.Р., Сергиенко О.Н. Использование метода акустической эмиссии для исследования разрушения чугунов // Техн. диагностика и неразрушающий контроль – № 3. – 1989. – С. 37–45.
6. Методические особенности определения статической трещиностойкости чугунов / А.Н. Ткач, Н.В. Лысак, Т.Я.

- Юськів, В.Р. Скальський и др. // Физ.-хим. механика материалов. – 1988. – №1. – С. 68–73.
7. Механіка руйнування і міцність матеріалів. Довідниковий посібник / Т.5. Неруйнівний контроль і технічна діагностика / Під ред. З.Т.Назарчука. – Львів: фізико-мех. ін-т. ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2001. – 1134 с.
  8. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 354 с.
  9. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. – М.: Мир, 1977. – 302 с.
  10. Подильчук Ю.Н., Добривечер В.В О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением, подверженном действию равномерного теплового потока в плоскости включения // Прикл. механика. – 1996. – 32, №8. – С. 31–40.
  11. Разрушение алюминиевых сплавов при растягивающих напряжениях / М.Е. Дриц, А.М. Корольков, Ю.П. Гук и др. – М.: Наука, 1973. – 215 с.
  12. Распределение напряжений вблизи остроугольных дефектов / М.В. Делявський, Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницький, Р.С. Громяк // Физ.-хим. механика материалов. – 1979. – 15, №3. – С. 46–55; – №6. – С. 71–76.
  13. Скальський В.Р., Коваль П.М. Акустична емісія під час руйнування матеріалів, виробів і конструкцій. Методологічні аспекти відбору та обробки інформації. – Львів: Сполом, 2005. – 396 с.
  14. Скальський В.Р., Сергієнко О.М., Окрепкий Ю.С. Підходи до оцінки руйнування включень у твердому тілі (Огляд)//Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2007. – №3. – С. 18–25.
  15. Стащук Н.Г. Продольный сдвиг изотропного тела с прямолинейным жестким включением // Там же. – 1980. – 16, №3. – С. 78–82.
  16. Структура та опір руйнуванню залізобуглецевих сплавів / О.П. Остап, І.П. Волчок, О.Б. Колотілкін та ін. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка, 2001. – 272 с.
  17. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
  18. Acoustic emission during plastic deformation of Al single crystals and bicrystals / К. Kitagawa, М. Ueda, Y. Hirose, H. Ishi // Met. Fac. Technol. Kanazawa Univ. – 1980. – 13, №2. – P. 175–185.
  19. Rouby D. and Fleischmann P. Spectral analysis of acoustic emission from aluminium crystals undergoing plastic deformation // Phys. Stat. Solidi (A). – 1978. – 48, №2. – P. 439–445.