

УДК 539.3

Максимович О.В., Іванюк Т.В.

Луцький національний технічний університет

## ЧИСЛОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНЬ У АНІЗОТРОПНІЙ ПІВПЛОЩИНІ З ВИРІЗАМИ

**Максимович О.В., Іванюк Т.В.** Числовий підхід до розрахунку напружень у анізотропній півплощині з вирізами. Розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану біля вирізів у анізотропних пластинках.

**Ключові слова:** Анізотропія, пластинка, виріз, напруження.

**Максимович О.В., Іванюк Т.В.** Числовой подход к расчету напряжений в анизотропной полу плоскости с вырезами. Разработан алгоритм расчета напряженно - деформированного состояния около вырезов в анизотропных пластинках.

**Ключевые слова:** Анизотропия, пластинка, вырез, напряжения.

**O. Maksimovich, T. Ivanyuk.** A numerical approach to the calculation of stresses in anisotropic pitosin with cutouts. The algorithm of calculation is worked out tensely - deformed state near cuts in anisotropic plates.

**Keywords:** Anisotropy, plate, cut, tension.

Розглядається задача про визначення напружено-деформованого стану (НДС) анізотропної півплощини із вирізами та тріщинами, що розміщені вздовж кривих  $L_j$  ( $j=1, \dots, J$ ). Прийmemo, що пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності, прикладених до тріщин зусиль  $(X_T, Y_T)$ , які приймаються однаковими на її протилежних берегах.

Питання дослідження напружень біля вирізів для анізотропних матеріалів вивчено в літературі в значно меншій мірі, ніж для ізотропних матеріалів. У роботі розроблений алгоритм визначення НДС анізотропної півплощини з вирізами за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь, який використовують стосовно до пластинок із тріщинами.

**Інтегральні рівняння задачі.** Розв'язок задачі будемо визначати через комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi(z_1)$ ,  $\Psi(z_2)$ , де  $z_j = x + s_j y$ ,  $s_j$  – корені характеристичного рівняння

$$\Delta(s) = \alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0, \quad (1)$$

причому  $\text{Im } s_j > 0$ ,  $\alpha_{ij}$  – пружні сталі.

Розглянемо довільну криву  $\Gamma$ , яка лежить в області  $D$ , що займає пластинка та виберемо на ній додатній напрямок обходу. Введемо вектор напружень  $\underline{S}_\Gamma$  на дотичній до кривої площинці, нормаль до якої розміщена справа відносно вибраного напрямку обходу. Проекції вектора напружень  $\underline{S}_\Gamma$   $(X, Y)$  і похідні від переміщень  $(u, v)$  за дуговою координатою на кривій через комплексні потенціали Лехніцького визначаються за формулами [1-2]

$$Y = -2 \text{Re} \left[ \Phi(z_1) z_1' + \Psi(z_2) z_2' \right], \quad X = 2 \text{Re} \left[ s_1 \Phi(z_1) z_1' + s_2 \Psi(z_2) z_2' \right], \\ u' = 2 \text{Re} \left[ p_1 \Phi(z_1) z_1' + p_2 \Psi(z_2) z_2' \right], \quad v' = 2 \text{Re} \left[ q_1 \Phi(z_1) z_1' + q_2 \Psi(z_2) z_2' \right], \quad (2)$$

де  $u' = du / ds$ ,  $v' = dv / ds$ ,  $p_j = \alpha_{11}s_j^2 - \alpha_{16}s_j + \alpha_{12}$ ,  $q_j = \alpha_{12}s_j - \alpha_{26} + \alpha_{22} / s_j$ ,

$z_j' = dx / ds + s_j dy / ds$ ,  $ds$  – диференціал дуги на  $\Gamma$ .

На основі (2) маємо взаємозв'язок [1]

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1 u' + p_1 X + q_1 Y}{\Delta_1 z_1'}, \quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2 u' + p_2 X + q_2 Y}{\Delta_2 z_2'}, \quad (3)$$

де  $\Delta_1 = a_{11}(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_2)$ ,  $\Delta_2 = a_{11}(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_2)$ ,

Для побудови загального розв'язку задачі розглянемо спочатку нескінченну область, що містить розріз  $L$ .

На основі співвідношень (3) та [1,3] отримуємо інтегральні представлення для комплексних потенціалів

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi\Delta_1 i} \int_L \frac{(-g_2' + s_1 g_1') ds}{t_1 - z_1} + \Phi_s(z_1), \quad \Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi\Delta_2 i} \int_L \frac{(-g_2' + s_2 g_1') ds}{t_2 - z_2} + \Psi_s(z_2), \quad (4)$$

де  $g_1 = u^+ - u^-$ ,  $g_2 = v^+ - v^-$ ;  $u^\pm, v^\pm$  – граничні значення переміщень при підході до розрізу зліва і справа відносно вибраного напрямку;  $ds$  – диференціал дуги; комплексні потенціали з індексом  $s$  визначають напружений стан нескінченної суцільної пластинки, який виникає тільки від дії зосереджених сил і навантаження на безмежності. Зазначимо, що функції  $g_1, g_2$  – стрибки переміщень на берегах тріщини.

Підставимо представлення (4) в формули для визначення вектора напружень на тріщині. Використовуючи формули Сохоцького при граничному переході, маємо при  $(x, y) \in L$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'] &= -Y_T, \\ 2\operatorname{Re}[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'] &= X_T, \end{aligned} \quad (5)$$

де інтеграли із представлення (4) розглядаються в сенсі головного значення за Коші.

Перепишемо представлення (4) у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [g_1'\Phi_1(z_1, t_1) + g_2'\Phi_2(z_1, t_1)] ds + \Phi_s(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [g_1'\Psi_1(z_2, t_2) + g_2'\Psi_2(z_2, t_2)] ds + \Psi_s(z_2), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\Phi_1 = \frac{A_1}{t_1 - z_1}, \Phi_2 = \frac{A_2}{t_1 - z_1}, \Psi_1 = \frac{B_1}{t_2 - z_2}, \Psi_2 = \frac{B_2}{t_2 - z_2},$   
 $A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}.$

Розглянемо тепер випадок, коли пружна анізотропна пластинка займає задану область (півплощину), яку позначимо через  $D$ . Побудуємо інтегральні рівняння для такої пластинки з тріщинами таким чином, щоби умови на границі області  $D$  виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi_j^D(z_1), \Psi_j^D(z_2)$  ( $j=1, 2$ ), які є розв'язком задачі теорії пружності для області  $D$  з вільною від навантаження границею, за умови, що ці функції мають наступні особливості

$$\Phi_j^D(z_1) \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_j^D(z_2) \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{20}}, \quad (7)$$

де  $z_{10} = x_0 + s_1 y_0, z_{20} = x_0 + s_2 y_0$ ,  $(x_0, y_0)$  - деяка точка, що лежить в області  $D$ . Позначимо знайдені потенціали у вигляді  $\Phi_j^D(z_1, x_0, y_0), \Psi_j^D(z_2, x_0, y_0)$ .

Загальний розв'язок задачі теорії пружності для області  $D$  з тріщинами можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1^D(z_1, \xi, \eta)g_1'(s) + \Phi_2^D(z_1, \xi, \eta)g_2'(s)] ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1^D(z_2, \xi, \eta)g_1'(s) + \Psi_2^D(z_2, \xi, \eta)g_2'(s)] ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\Phi_D = \Phi_{DP} + \Phi_{D\infty}, \Psi_D = \Psi_{DP} + \Psi_{D\infty}$ ,  $(\xi, \eta)$  - точка, за якою проводиться інтегрування. Тут потенціали  $\Phi_{D\infty}(z_1), \Psi_{D\infty}(z_2)$  – відповідають прикладеному на нескінченності навантаженню за умови, що границя вільна від навантаження. Потенціали  $\Phi_{DP}(z_1), \Psi_{DP}(z_2)$  – розв'язок задачі теорії пружності, що відповідає прикладеним до пластинки зосередженим силам при вільній від навантаження границі області  $D$ .

Крім цього, необхідно задовольнити умови однозначності переміщень, які для випадку для внутрішніх тріщин запишуться

$$\int_L g_1' ds = 0, \int_L g_2' ds = 0. \quad (9)$$

Для реалізації даного розв'язку необхідно побудувати розв'язок задачі теорії пружності для області  $D$  (півплощина  $y < 0$ ), з вільною від навантаження границею, за умови, що ці функції мають полюси (7). Використовуючи результати [1], маємо

$$\begin{aligned} \Phi_j^D(z_1) &= -\left( \frac{A_j}{z_1 - z_{10}} + \alpha_1 \frac{\bar{A}_j}{z_1 - z_{10}} + \beta_1 \frac{\bar{B}_j}{z_1 - z_{20}} \right), \\ \Psi_j^D(z_2) &= -\left( \frac{B_j}{z_2 - z_{20}} + \alpha_2 \frac{\bar{A}_j}{z_2 - z_{10}} + \beta_2 \frac{\bar{B}_j}{z_2 - z_{20}} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\alpha_1 = \frac{s_1 - s_2}{\Delta_1}$ ,  $\beta_1 = \frac{s_2 - s_2}{\Delta_1}$ ,  $\beta_2 = \frac{s_1 - s_2}{\Delta_1}$ ,  $\alpha_2 = \frac{s_1 - s_1}{\Delta_1}$ ,  $\Delta_1 = s_2 - s_1$ .

Розглянемо випадок, коли півплощина має виріз, який обмежений контуром  $L_v$ , межа якого вільна від навантаження. Позначимо точки, в яких виріз виходить на межу півплощини через  $A_v, B_v$ . При розрахунках виріз вважаємо внутрішньою тріщиною, що лежить на кривій  $L_v$  з вершинами в точках  $A, B$  при  $A \rightarrow A_v, B \rightarrow B_v$ . Прийmemo, що береги цієї тріщини вільні від навантаження, точки  $A, B$  мають однакову ординату  $h$ , яку при розрахунках будемо спрямовувати до нуля. Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь, які отримують на основі зображень (8) шляхом задоволення заданих умов на берегах тріщин для пластинок із тріщинами наведено в [1,2,4].

**Результати розрахунків.** Розглянуто випадок розтягу півплощини із вирізом зусиллями  $p$ , що діють паралельно до межі пластинки. В таблиці 1 наведено значення віднесених до  $p$  напружень у вершині півкругового вирізу залежно від відстані вершин тріщини  $h$  для ізотропного матеріалу та композитних матеріалів  $EF, LU$ , коли жорсткість матеріалу більша в напрямку осі  $Oy$  або напрямку осі  $Ox$ . При розгляді останнього випадку тут і далі біля матеріалів вказуватимемо індекс '90'. Крім цього в таблиці наведено відношення напружень  $\sigma$  у вершині вирізу до максимальних напружень  $\sigma_0$  на межі кругового отвору у відповідній нескінченній пластинці.

Таблиця 1. Напруження біля півкругового вирізу

$h/R \cdot 10^n$	Ізо		EF		$EF_{90}$		LU		$LU_{90}$	
	$\sigma/p$	$\sigma/\sigma_0$	$\sigma/p$	$\sigma/\sigma_0$	$\sigma/p$	$\sigma/\sigma_0$	$\sigma/p$	$\sigma/\sigma_0$	$\sigma/p$	$\sigma/\sigma_0$
1	3,1617	1,0541	4,013	1,0569	3,4055	1,0516	3,325	1,0453	7,9578	1,0641
2	3,0741	1,0249	3,8911	1,0248	3,3026	1,0198	3,2149	1,0107	7,6883	1,0281
3	3,0663	1,0223	3,8805	1,022	3,2939	1,0171	3,2063	1,008	7,6653	1,025
4	3,0655	1,0221	3,8794	1,0217	3,293	1,0168	3,2055	1,0078	7,663	1,0247
5	3,0654	1,022	3,8793	1,0217	3,2929	1,0168	3,2054	1,0077	7,6625	1,0246
6	3,0654	1,022	3,8793	1,0217	3,2929	1,0168	3,2053	1,0077	7,6625	1,0246
7	3,0654	1,022	3,8793	1,0217	3,2929	1,0168	3,2053	1,0077	7,6625	1,0246

Отримані напруження за даним алгоритмом добре узгоджуються із відомими в літературі даними для ізотропного матеріалу [5].

Із таблиці видно, що напруження біля вирізів можуть бути розраховані на основі заміни вирізів відповідною внутрішньою тріщиною, вершини якої доцільно розміщувати на відстані  $h/R = 10^{-5} \div 10^{-7}$  від межі пластинки.

Виконано розрахунки напружень у вершині півеліптичного вирізу з півосями  $a$  в горизонтальному напрямку та  $b$  у вертикальному. В таблиці 2 наведено відносні максимальні напруження для вирізів із відношенням півосей  $b/a = 3, 5, 20$ .

Табл.2. Напруження біля півеліптичного вирізу

n	b/a=3			b/a=5			b/a=20		
	Ізо	ЛУ	LU <sub>90</sub>	Ізо	ЛУ	LU <sub>90</sub>	Ізо	ЛУ	LU <sub>90</sub>
1	7,4901	7,7973	21,5066	11,9169	11,2882	16,9646	45,386	45,836	136,068
2	7,4202	7,714	21,2887	11,8502	11,2225	16,8673	44,785	47,396	136,629
3	7,4133	7,7053	21,259	11,844	11,216	16,8578	45,477	46,178	136,701
4	7,4129	7,7048	21,2648	11,8438	11,2157	16,8573	45,387	47,089	136,694
5	7,4129	7,7046	21,2634	11,8438	11,2157	16,8573	45,379	46,616	136,557
6	7,4129	7,7046	21,2633	11,8438	11,2157	16,8573	45,378	46,591	136,426
7	7,4129	7,7046	21,2633	11,8438	11,2157	16,8573	45,378	46,589	136,541

Для визначення напружень у ізотропних пластинках із еліптичним вирізом запропонована формула [5], похибка якої не перевищує 1%

$$\sigma / p = \frac{1 + 2,48\gamma + 1,16\gamma^2}{1 + 0,517\gamma}, \quad (11)$$

де  $\gamma = b/a$ .

Розраховані за цією формулою відносні напруження будуть 7,401 при  $b/a = 3$ , 11,827 при  $b/a = 5$  та 45,379 при  $b/a = 20$ . Тобто, наведені в таблиці 1 та розраховані за формулою (11) напруження відрізняються не більше за 0,2% в перших двох випадках та  $\sim 0,002\%$  при  $b/a = 20$ .

Із таблиці видно, що і для витягнутих вирізів, біля яких виникають високі напруження, може бути використаний запропонований підхід, в якому виріз заміняється внутрішньою тріщиною.

Розраховані віднесені до  $\sigma_0$  напруження для пластинок із вирізами у вигляді сегмента круга в анізотропній пластинці, жорсткість матеріалу в якій максимальна в горизонтальному напрямку. Ці напруження залежно від кута  $\theta$  між віссю  $Ox$  і дотичною до межі вирізу в точці її перетину із межею наведено на рис.1, де кривим 1–5 відповідають: ізотропний матеріал, ЕФ (крапки), ЕТФ, ЛУ, СФ2, СФ1

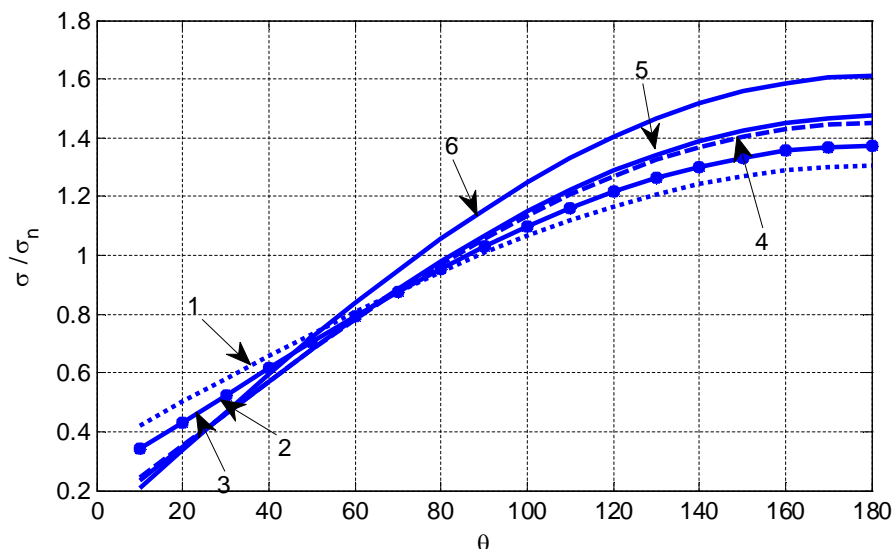


Рис.1. Відносні ККН для сегментних вирізів

**Висновок.** Запропоновано підхід до дослідження напружень біля вирізів у анізотропній пластинці, який базується на заміні вирізу внутрішньою тріщиною, що лежить на його межі. Проведені в роботі числові експерименти показали, що розробленим методом можуть бути розраховані з високою точністю напруження біля півеліптичних вирізів, якщо вершини тріщини розмістити на відстанях  $(10^{-5} \div 10^{-7})a$ , де  $a$  – менша піввісь еліпса.

#### Список використаних джерел

1. Божидарнік В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович // Монографія. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – С. 226.
2. Максимович О. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів / О. Максимович // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 3. – С. 36-42.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили // М.: Наука, 1966. – С. 708.
4. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук // К.: Наук. думка, 1989. – С. 248.
5. Саврук М.П., Казберук А. Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов. Прикл. механика, т.43, 2007, №2, с.70-87.