

УДК 539.3

Бортник К.Я., к.т.н.

Луцький національний технічний університет

## АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЛАМАНОЮ ТРІЩИНОЮ

**Бортник К.Я.** Алгоритм розв'язання інтегральних рівнянь задачі теорії пружності для анізотропної пластинки з ламаною тріщиною. У статті запропоновано алгоритм визначення НДС для ламаної тріщини, який складає основу для побудови енергетичного критерію руйнування. Для визначення НДС побудовано модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на берегах основної тріщини задовольняються тотожно. В такому підході алгоритм розв'язування задачі спрощується, оскільки невідомими будуть тільки функції на скінченних, додаткових тріщинах, що дозволяє підвищити точність розрахунків.

**Ключові слова:** алгоритм, пластинка, модифіковані інтегральні рівняння, метод механічних квадратур, тріщина, напруження.

**Бортник К.Я.** Алгоритм решения интегральных уравнений задачи теории упругости для анизотропной пластинки с ломаной трещиной. В статье предложен алгоритм определения НДС для ломаной трещины, который составляет основу для построения энергетического критерия разрушения. Для определения НДС построено модифицированные интегральные уравнения, при которых условия на берегах основной трещины удовлетворяются тождественно. В таком подходе алгоритм решения задачи упрощается, поскольку неизвестными будут только функции на конечных, дополнительных трещинах, что позволяет повысить точность расчетов.

**Ключевые слова:** алгоритм, пластинка, модифицированные интегральные уравнения, метод механических квадратур, трещина, напряжения.

**Bortnyk K.Y.** Algorithm for solving integral equations problem of elasticity for anisotropic plate with broken crack. The algorithm for determining the NDS broken crack, which is the basis for building energy criterion destruction. To determine the NDS built modified integral rivnyannya under which conditions on the banks of the main crack satisfied identically. In this approach, an algorithm for solving the problem is simplified because the unknowns will only function on a finite, additional cracks, which can improve the accuracy of calculations.

**Keywords:** algorithm, modified integral equation, method of mechanical quadratures.

**Постановка наукової проблеми.** Сучасні технології дозволяють створювати композитні матеріали, які мають наперед задані механічні і міцнісні характеристики, стійкі до дії агресивних середовищ у широкому діапазоні робочих температур тощо. Тому такі матеріали широко використовуються для створення елементів конструкцій і деталей машин у машинобудуванні, суднобудуванні, автомобілебудуванні, авіаційній техніці, хімічній промисловості. В композитних матеріалах широко поширені процеси руйнування, які проходять шляхом утворення тріщино-подібних дефектів у процесі їх виготовлення чи експлуатації з подальшим їх ростом до критичних розмірів. У зв'язку з цим становить значний практичний інтерес виконати розрахунки на міцність композитних елементів конструкцій.

Розрахунки ж на міцність таких конструкцій можуть бути виконані на основі детального вивчення напружено-деформованого стану (НДС) біля тріщин. Алгоритм визначення НДС анізотропних елементів конструкцій складної форми може бути проведений, як правило, на основі чисельних методів і, зокрема, методів скінченних різниць та скінченних елементів [1,3,6,7,9].

**Аналіз досліджень.** Питанням розробки алгоритмів визначення НДС пластинчастих анізотропних елементів конструкцій присвятили свої дослідження Андрейків О.Є., Божидарнік В.В., Гудрамович В.С., Гриліцький Д.В., Грінченко В.Т., Максимович О.В., Сулима Г.Т., Скальського В.Р., Камінський А.О. та багато інших.

Сьогодні у наукових публікаціях достатньо широко висвітлено питання дослідження НДС при різних схемах навантаження для ізотропних зразків, а тому актуальною є проблема побудови методик визначення НДС біля тріщин, що змінюють напрямок у процесі росту для анізотропних матеріалів.

Виходячи з цього **мета** нашої статті полягає у розробці алгоритму розв'язання інтегральних рівнянь задачі теорії пружності для анізотропної пластинки з ламаною тріщиною.

**Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.** Безпосереднє застосування загальних інтегральних рівнянь до розгляду пластинки із півнескінченною тріщиною є складною задачею, оскільки кількість невідомих на ній буде також нескінченною. Для ізотропної пластинки із півнескінченною тріщиною в [8] побудовано модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на берегах цієї тріщини задовольняються

тотожно. В такому підході розв'язування задачі спрощується, оскільки невідомими будуть тільки функції на скінченних, додаткових тріщинах, що дозволяє підвищити точність розрахунків.

Побудуємо такі рівняння і для випадку анізотропних пластинок. Розглянемо спочатку більш загальний випадок, коли пружна анізотропна пластинка займає область  $D$ , що обмежена контуром  $L_D$ . Прийmemo, що пластинка послаблена тріщиною, яка лежить на контурі  $L$ . Розглянемо випадок, коли пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності та зосереджених сил. Побудуємо інтегральні рівняння для такої пластинки з тріщиною таким чином, щоби умови на межі області  $D$  виконувались автоматично. З цією метою вводять [2] комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi_j, \Psi_j$  ( $j=1, 2$ ), які є розв'язком задачі теорії пружності для області  $D$  з вільною від навантаження або закріпленою межею, за умови, що ці функції мають наступні особливості

$$\Phi_j \sim \frac{A_j}{z_{10} - z_1}, \quad \Psi_j \sim \frac{B_j}{z_{20} - z_2}, \quad (1)$$

де  $z_j = x + s_j y$ ,  $j=1, 2$ ;  $s_j$  – корені характеристичного рівняння [1];  $\alpha_{ij}$  – пружні сталі;  $z_{10} = x_0 + s_1 y_0$ ,  $z_{20} = x_0 + s_2 y_0$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ .

Позначимо далі такі потенціали через  $\Phi_j(z_1, T), \Psi_j(z_2, T)$ , де  $T$  – точка з координатами  $(x_0, y_0)$ .

При так побудованих потенціалах  $\Phi_j(z_1, T), \Psi_j(z_2, T)$  загальний розв'язок задачі теорії пружності для області  $D$  з тріщинами буде [5]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1(z_1, T)g_1'(s) + \Phi_2(z_1, T)g_2'(s)]ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1(z_2, T)g_1'(s) + \Psi_2(z_2, T)g_2'(s)]ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $g_j' = dg_j/ds$ ,  $g_{1,2}$  – стрибок переміщень на берегах тріщин,  $\Phi_D(z_1) = \Phi_D^P(z_1) + \Phi_D^\infty(z_1)$ ,  $\Psi_D(z_2) = \Psi_D^P(z_2) + \Psi_D^\infty(z_2)$ ,  $T$  – точка  $(\xi, \eta)$ , за якою проводиться інтегрування. Тут потенціали  $\Phi_D^\infty, \Psi_D^\infty$  та  $\Phi_D^P, \Psi_D^P$  – розв'язки задач теорії пружності для області  $D$  з однорідними умовами на межі при дії прикладених до пластинки на нескінченності зусиль або зосереджених сил відповідно.

Інтегральні рівняння для знаходження функцій  $g_1'(s), g_2'(s)$  отримуємо після підстановки (2) в граничні умови за використання формули Сохоцького при граничному переході у вигляді

$$\int_\Gamma [g_1'(s)Q_1(Z, T) + g_2'(s)Q_2(Z, T)]ds = Q(Z), \quad Z \in L, \quad (3)$$

де  $Q(Z) = Q_T(Z) - Q_D(Z)$ ;  $Q_j(Z, T)$  – вектор напружень  $q_L$  в точці  $Z$  з координатами  $(x, y)$  на кривій  $L$ , який визначається за формулою [3] через комплексні потенціали  $\Phi_j^D(z_1, T), \Psi_j^D(z_2, T)$ ;  $T$  – точка з координатами  $(\xi, \eta)$ ;  $Q_D(Z)$  – вектор напружень, відповідний потенціалам  $\Phi_D(z_1), \Psi_D(z_2)$ .

Наприклад

$$\begin{aligned} Q_j(Z, T) &= (s_1 + i)z_1' \Phi_j^D(z_1, T) + \overline{(s_1 + i)z_1'} \overline{\Phi_j^D(z_1, T)} + \\ &+ (s_2 + i)z_2' \Psi_j^D(z_2, T) + \overline{(s_2 + i)z_2'} \overline{\Psi_j^D(z_2, T)}. \end{aligned}$$

Система алгебраїчних рівнянь, яка відповідає інтегральним рівнянням (3), будується методом механічних квадратур [2].

Побудуємо потенціали  $\Phi_j, \Psi_j$  для задачі теорії пружності для напівнескінченної тріщини  $x > 0$ . Для цього необхідно побудувати допоміжні (дислокаційні) розв'язки  $\Phi_j(z_1, M), \Psi_j(z_2, M)$ , де  $M$  – точка  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $D$  – область, яку займає пластинка – поза тріщиною. Для їх знаходження введемо комплексні потенціали  $\Phi_0(z_1), \Psi_0(z_2)$  для області  $D$ , за умови, що ці функції мають наступні особливості

$$\Phi_0(z_1) \sim \frac{A}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_0(z_2) \sim \frac{B}{z_2 - z_{20}}, \quad (4)$$

та відповідні їм напруження на берегах тріщини рівні нулю. Тут  $A, B$  – довільні комплексні сталі;  $z_{j0} = x_0 + s_j y_0$ . За побудованих таким чином потенціалів дислокаційні розв'язки будуть

$$\Phi_j(z_1, M) = -\Phi_0(z_1)|_{A=A_j, B=B_j}, \quad \Psi_j(z_2, M) = -\Psi_0(z_2)|_{A=A_j, B=B_j}.$$

Потенціали повинні задовольняти при  $x > 0, y = \pm 0$  умовам відсутності напружень

$$\operatorname{Re}(\Phi_0(z) + \Psi_0(z)) = 0, \quad \operatorname{Re}(s_1 \Phi_0(z) + s_2 \Psi_0(z)) = 0.$$

Відобразимо область  $z$  із розрізом  $x > 0, y = \pm 0$  функцією  $z = \zeta^2$  на верхню півплощину  $\eta > 0$ , де  $\zeta = \xi + i\eta$ . В результаті отримуємо для функцій  $\Phi_1(\zeta) = \Phi_0(\zeta^2), \Psi_1(\zeta) = \Psi_0(\zeta^2)$  умови

$$\operatorname{Re}(\Phi_1(\xi) + \Psi_1(\xi)) = 0; \quad \operatorname{Re}(s_1 \Phi_1(\xi) + s_2 \Psi_1(\xi)) = 0, \quad -\infty < \xi < \infty$$

Ці функції в площині  $\zeta$  мають полюси

$$\Phi_1(\zeta) \sim \frac{A}{2(\zeta - \zeta_1)}, \quad \Psi_1(\zeta) \sim \frac{B}{2(\zeta - \zeta_2)},$$

де  $\zeta_1 = \sqrt{z_{10}}, \zeta_2 = \sqrt{z_{20}}$ .

Використовуючи підхід [4], звідси отримуємо

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \left[ \frac{A}{\sqrt{z} - \zeta_1} + \alpha_1 \frac{\bar{A}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_1} + \beta_1 \frac{\bar{B}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_2} \right], \quad (5)$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \left[ \frac{B}{\sqrt{z} - \zeta_2} + \alpha_2 \frac{\bar{A}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_1} + \beta_2 \frac{\bar{B}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_2} \right],$$

де  $\zeta_j = \sqrt{z_{j0}}; \operatorname{Im} \zeta_j > 0; \operatorname{Im} \sqrt{z} > 0$ .

Тут  $\alpha_1 = \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\Delta_1}, \beta_1 = \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\Delta_1}, \beta_2 = \frac{s_1 - s_2}{\Delta_1}, \alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\Delta_1}, \Delta_1 = s_2 - s_1$ .

**Знаходження основного напруженого стану** (потенціалів  $\Phi_D(z_1), \Psi_D(z_2)$ ).

Розглянемо випадок.

1) Однорідний напружений стан для пластинки з півнескінченною тріщиною з вільними від навантаження берегами. Будемо розглядати випадок, коли задані КІН  $K_I, K_{II}$  та береги тріщини вільні від навантаження. Однорідний напружений описується потенціалами

$$\Phi(z_1) = \frac{B_1}{\sqrt{z_1}}, \quad \Psi(z_2) = \frac{B_2}{\sqrt{z_2}}, \quad (6)$$

$$\text{де } B_1 = \frac{s_2 K_I + K_{II}}{2(s_2 - s_1)\sqrt{2\pi}} i, \quad B_1 = -\frac{s_1 K_I + K_{II}}{2(s_2 - s_1)\sqrt{2\pi}} i.$$

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що ці потенціали забезпечують відсутність напружень на берегах тріщини (при  $x > 0$ ) та визначають задані КІН (відповідні їм напруження на продовженні тріщини при  $y = 0, x < 0$  будуть  $\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}, r = |x|$ ).

**Результати розрахунків.** Прийmemo, що в процесі руйнування на окремих елементарних етапах тріщина підростає вздовж прямої. Тому важливе значення має задача про визначення напружень біля тріщини, коли відношення довжини бічної частини тріщини до основної є нескінченно малою. Для моделювання такої задачі розглянемо тріщину, що складається із двох ланок: півнескінченної  $x > 0$  та прямолінійної, довжиною  $l$ , яка нахилена під кутом  $\theta$  до від'ємної півосі  $Ox$ , причому напрямком із максимальною жорсткістю матеріалу нахилений під кутом  $\varphi$  до основної тріщини. Покладаємо, що відомі КІН для півнескінченної тріщини (рис.1) -  $K_I^0, K_{II}^0$ .

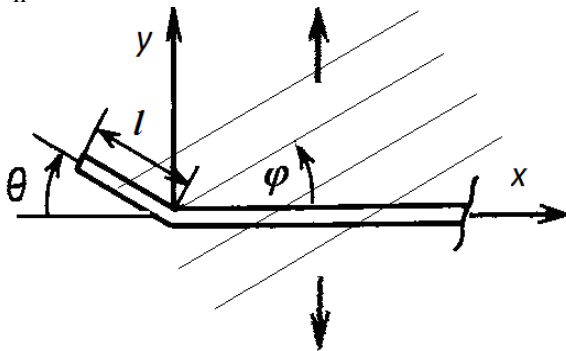


Рис.1. Схема задачі

Тоді коефіцієнти інтенсивності напружень для вершини нахиленої ланки у випадку анізотропної пластинки зображають у вигляді [11,12]

$$K_I = C_{11}(\varphi, \theta) K_I^0 + C_{12}(\varphi, \theta) K_{II}^0, \quad K_{II} = C_{21}(\varphi, \theta) K_I^0 + C_{22}(\varphi, \theta) K_{II}^0, \quad (7)$$

де  $\varphi$  – кут між напрямком з мінімальною (або максимальною) жорсткістю матеріалу і основною тріщиною.

Позначимо для пластинки із основною тріщиною через  $K_{I\theta}^0(\varphi, \theta), K_{II\theta}^0(\varphi, \theta)$  КІН, які пов'язані із напруженнями на нахилених під кутом  $\theta$  площинках співвідношеннями

$$\sigma_\theta = \frac{K_{I\theta}^0(\varphi, \theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{K_{II\theta}^0(\varphi, \theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (8)$$

де  $\varphi$  – кут нахилу дотичної у вершині тріщини до осі  $Ox$ .

Проведені розрахунки показали, що КІН  $K_I, K_{II}$  для дволанкової тріщини є близькі до КІН  $K_{I\theta}, K_{II\theta}$  для основної тріщини на нахилених площинках. В зв'язку з цим запишемо

$$C_{ij} = K_{ij}^0 + \Delta C_{ij}, \quad (9)$$

де  $K_{11}^0, K_{12}^0$  і  $K_{21}^0, K_{22}^0$  дорівнюють величинам  $K_{I\theta}^0(\varphi, \theta), K_{II\theta}^0(\varphi, \theta)$  при  $K_I^0 = 1, K_{II}^0 = 0$  та  $K_I^0 = 0, K_{II}^0 = 1$  відповідно.

Поправкові члени  $\Delta C_{ij}$  визначались числово. Для цього знаходились КІН методом інтегральних рівнянь, а далі отримані дані описувались аналітично з використанням методу найменших квадратів. В результаті ці величини при  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ, 0 \leq \theta \leq 90^\circ$  записано у вигляді

$$\Delta C_{ij} = a_{00} + a_{10}x^2 + a_{20}x^4 + a_{01}y^2 + a_{02}y^4 + a_{11}x^2y^2 \quad (10)$$

де  $y = \varphi/90^\circ$ .

Для матеріалів ЕФ, ЕТФ та ЛУ-1 значення коефіцієнтів у формулі (10) наведено в таблицях 1а, 1б, 1в.

Таблиця 1.а.

Коефіцієнти формули (10) для матеріалу ЕФ

	$a_{00}$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{11}$
$\Delta C_{11}$	0,0012	-0,0152	0,0164	0,0044	0,0035	0,0066
$\Delta C_{12}$	0,0027	-0,0473	0,0527	0,0686	0,0540	0,0030
$\Delta C_{21}$	0,0014	-0,0210	0,0243	0,0044	-0,0083	0,0004
$\Delta C_{22}$	0,0047	-0,0499	0,0580	0,2231	-0,0762	-0,0124

Таблиця 1.б.

Коефіцієнти формули (10) для матеріалу ЕТФ

	$a_{00}$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{11}$
$\Delta C_{11}$	0,0018	-0,0161	0,0155	-0,0008	0,0011	0,0118
$\Delta C_{12}$	0,0027	-0,0597	0,0720	0,0469	0,0477	0,0543
$\Delta C_{21}$	0,0030	-0,0286	0,0290	-0,0095	-0,0052	0,0138
$\Delta C_{22}$	0,0004	-0,0618	0,0966	0,2093	-0,0666	-0,0313

Таблиця 1.в.

Коефіцієнти формули (10) для матеріалу Лу-1

	$a_{00}$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{11}$
$\Delta C_{11}$	0,0048	-0,0495	0,0539	-0,0104	-0,0079	0,0274
$\Delta C_{12}$	0,0110	-0,1400	0,1596	0,0537	0,0246	0,0354
$\Delta C_{21}$	0,0049	-0,0633	0,0749	-0,0244	-0,0015	0,0004
$\Delta C_{22}$	0,0108	-0,1375	0,1773	0,1738	-0,0531	-0,0592

**Висновки та перспективи подальшого дослідження.** Розглянута основна для побудови енергетичного критерію руйнування задача про визначення напружень біля ламаної тріщини, коли відношення довжини бічної ланки до основної є нескінченно малим. Використано підхід, в якому в композитній пластинці основна тріщина є півнескінченна. Для алгоритму визначення НДС, аналогічно, як і випадку ізотропних матеріалів, побудовано модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на берегах основної тріщини задовольняються тотожно. Детально розглянуто тріщину, що складається із двох ланок: півнескінченної та обмеженої довжини. КІН для вершини нахиленої ланки записано у вигляді аналогічному до відомих співвідношень для ізотропних матеріалів

Подальші наші дослідження стосуватимуться розгляду початкового процесу руйнувань, що зароджуються біля тонкостінного жорсткого включення.

#### Список використаних джерел

1. Бажанов В.Л. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / В.Л. Бажанов // Под ред. И. И. Гольденבלата // М.: Высшая школа, 1970. – С. 408.

2. Божидарнік В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович // Монографія. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – С. 226.
3. Григоренко Я.М. Статика анізотропних толстостенних оболонок / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова // К.: Вища школа, 1985. – С. 190.
4. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анізотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский // Киев-Донецк: Вища школа, 1976. – С. 200.
5. Максимович О.В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у анізотропних пластинчастих елементах конструкцій та деталях машин / О.В. Максимович // Международный сборник научных трудов Донецкого национального технического университета «Прогрессивные технологии и системы машиностроения». – Донецк. – 2009. – Випуск 37. – С. 136-142.
6. Пискунов В.Г. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко, В.К. Присяжнюк и др. // К.: Вища школа, 1987. – С. 200.
7. Рассказов А.О. Теория и расчет слоист их ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга // К.: Вища школа, 1986. – С. 191.
8. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук // К.: Наук. думка, 1989. – С. 248.
9. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анізотропного тела / В.С. Саркисян // Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. – 1976. – С. 536.
10. Максименко В.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния анізотропной пластины с эллиптическим отверстием и тонкими жесткими включениями / В.Н. Максименко, С.А. Зорин // Прикл. механика и техн. физика. – 2007. – Т. 48. – № 4. – С. 173-180.
11. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук // К.: Наук. думка, 1989. – С. 248.
12. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками // М.: Мир, 1990. – Т. 1. – С. 448.