УДК 548.52
Боднар Д.І., Дутчак Б.І., Михальчук Р.І.
Луцький національний технічний університет

ДЕЯКІ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ СЕРЕДНІХ ГАРМОНІЙНИХ, ЇХ КОНТИНУАЛЬНІ АНАЛОГИ ТА ЗАСТОСУВАННЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

Д.І. Боднар, Б.І. Дутчак, Р.І. Михальчук Деякі нерівності для середніх гармонійних, їх континуальні аналоги та застосування в системах автоматичного регулювання. Встановлено декілька нерівностей, як дискретного так і континуального характеру типу обернених середніх гармонійних.
Ключові слова: нерівність, диференціал, середнє гармонійне, функціонал, сума, інтеграл.
Форм. 11. Літ. 2.

Д.И. Боднар, Б.И. Дутчак, Р.И. Михальчук Некоторые неравенства для средних гармонических, их континуальные аналоги и применение в системах автоматического регулирования. Установлено несколько неравенств, как дискретного так и континуального характера типа обратных средних гармонических.
Ключевые слова: неравенство, функционал, среднее гармоническое, функционал, сумма, интеграл.

D. Bodnar, B. Dutchak, R. Mykhalchuk Some inequalities for harmonic means, their continuum analogs and application in control systems. Several discrete and continuum inequalities of the inverse harmonic mean type are obtained in the paper.
Keywords: inequality, differential, harmonic mean, functional, sum, integral.

Вступ. Задача дослідження та побудови аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів [1] та їх континуального аналогу інтегральних ланцюгових дробів [2] зумовили появу нерівностей, які представляють на нашу думку і самостійний інтерес. Далі такі нерівності будуть наводитись в хронологічному порядку відповідно до того, як вони були встановлені.

Основна частина.

Теорема 1. Для додатніх дійсних чисел x_i та y_i $(i=\overline{1,n};)$ мають місце нерівності

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}\right)^{-1}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^{-1}\right)^{-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{-1}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Доведення здійснюється методом математичної індукції.

При $n=1$ нерівність (1) очевидна, при $n=2$ справедливість встановлюється безпосередньо при допомозі елементарних обчислень.

Запровадивши позначення

$\overline{x}_{n-1}^{-1}=x_{n-1}^{-1}+x_n^{-1}$, $\overline{y}_{n-1}^{-1}=y_{n-1}^{-1}+y_n^{-1}$ і спираючись на індукцію,одержимо

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^{-1}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{-1}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n-2}x_i^{-1}+\overline{x}_{n-1}^{-1}\right)^{-1}+\left(\sum_{i=1}^{n-2}y_i^{-1}+\overline{y}_{n-1}^{-1})\right)^{-1}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-2}(x_i+y_i)^{-1}+(\overline{x}_{n-1}+\overline{y}_{n-1})^{-1}\right)^{-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{-1}\right)^{-1}$$

Остання нерівність слідує з (1),де $n=2$ і на місце x_1,x_2,y_1,y_2 покладено x_{n-1},x_n,y_{n-1},y_n відповідно. Послідовно застосовуючи нерівність (1) встановлена.

Теорема 2. Нехай $(x_{1j};x_{2j};x_{3j}...x_{nj})$ $(j=\overline{1,k})$ впорядкована сукупність дійсних додатніх чисел. Тоді

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^{\ -1}\right)^{-1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k}x_{ij})^{-1}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Теорема 3. Справедливою є нерівність

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i})^{-1}\le\frac{n}{n+\delta_{сер}}. \qquad (3)$$

де x_i,δ_j $(i=1,\overline{n};\ j=1,\overline{n})$ додатні дійсні числа, а

$$\delta_{cep} = n(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1})^{-1}.$$

Доведення. Перш за все переконуємось що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} = 1$$

а далі вводимо позначення $x_{ij} = \dfrac{x_i}{x_j}$ $(i, j = 1,\overline{n})$ $x_{n+1}, j = \delta_j^{-1}(j = 1,\overline{n})$ і застосовуємо (2).

Одержимо:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_{ij}^{-1}\right) \le \sum_{i=1}^{n+1}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} + \frac{\delta_{cep}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{n+\delta_{cep}}.$$

Як наслідок з попередньої теореми слідує нерівність

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i})^{-1} \le \frac{n}{n+\delta}. \qquad (4)$$

де δ - невід'ємне дійсне число.

Теорема 4. Нехай δ – невід'ємне дійсне число. Має місце нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j})^{-1} \ge \left(\delta+1\right)^{-1}, \quad x_i > 0 \qquad (5)$$

Доведення. Перш за все переконаємось в справедливості нерівності

$$\left(1+\delta+Ax+\frac{x}{y}\right)^{-1} + \left(1+\delta+Ay+\frac{y}{x}\right)^{-1} \ge \left(1+\delta+A\frac{xy}{x+y}\right)^{-1}, \qquad (6)$$

де $\delta \ge 0$, $A \ge 0$, $x > 0$, $y > 0$ – довільні додатні числа. Після нескладних обчислень остання нерівність зводиться до виду

$$\delta^2 + 2\delta + 2\delta A\frac{xy}{x+y} \ge 0.$$

Нерівність (5) доведемо методом математичної індукції. При $n = 1$ ця нерівність очевидна, при $n = 2$ справедливість (5) слідує з нерівності (6), якщо взяти $A = 0$. Запровадивши позначення $\overline{x}_{n-1}^{-1} = x_{n-1}^{-1} + x_n^{-1}$, тобто $\overline{x}_{n-1} = \dfrac{x_{n+1}x_n}{x_{n-1}+x_n}$ і застосувавши (6), де $A = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \mathrm{K} + x_{n-2}^{-1}$, $x = x_{n-1}$, $y = x_n$ одержимо

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\overline{x}_{n-1}}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_{n-1}}{x_j} + 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{-1} +$$

$$+\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{x_n}{x_j} + \frac{x_{n-2}}{x_n} + 1\right)^{-1} \ge \sum_{i=1}^{n-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\overline{x}_{n-1}}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\overline{x}_{n-1}}{x_j} + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_{n-1}}\right)^{-1} \ge \left(\delta+1\right)^{-1}.$$

Теорема 5. Нехай $x(t) > 0$ - довільна функція з простору $C_{[a;b]}$, а $\delta > 0$ – деяке число. Тоді:

$$\int_a^b \frac{d\tau}{\delta + x(\tau)\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{x(t)}} \le \frac{b-a}{\delta + (b-a)}.$$

Доведення. Дослідимо на екстремум функціонал

$$F[x(\cdot)] = \int_a^b \frac{d\tau}{\delta + x(\tau)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}}.$$

Диференціал Гато даного функціонала буде рівний:

$$dF[x(\cdot)] = dF(x;h) = \frac{d}{d\varepsilon} F\left[x(t) + \varepsilon h(t)\right]\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\int_a^b \frac{d\tau}{\delta + \left(x(\tau)+\varepsilon h(\tau)\right)\int_a^b \frac{dt}{\delta + \left(x(\tau) + \varepsilon\int_a^b \frac{dt}{x(t)+\varepsilon h(t)}\right)}}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{\left(\delta + x(t)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\left[h(t)\int_a^b \frac{dt}{x(t)} - x(\tau)\int_a^b \frac{h(t)dt}{x^2(t)}\right]d\tau$$

де $0 < h(t) < 1$, $h(t) \in C_{[a;b]}$, $h(a) = h(b)$

Скориставшись узагальненою теоремою про середнє значення, одержимо

$$dF(x;h) = -\frac{1}{\left(\delta + x(\xi)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\left[\int_a^b h(t)dt\int_a^b \frac{dt}{x(t)} - \int_a^b x(t)d\tau\int_a^b \frac{h(t)dt}{x^2(t)}\right] =$$

$$-\frac{1}{\left(\delta + x(\zeta)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\cdot\left[\int_a^b h(t)dt\int_a^b \frac{d\tau}{x(\tau)} - \int_a^b \frac{h(t)dt}{x^2(t)}\int_a^b x(\tau)d\tau\right] =$$

$$-\frac{1}{\left(\delta + x(\zeta)\int_a^b \frac{dt}{x(t)}\right)^2}\cdot\int_a^b h(t)\left[\int_a^b \frac{d\tau}{x(\tau)} - \frac{1}{x^2(t)}\int_a^b x(\tau)d\tau\right]dt$$

Прирівнюємо $dF(x;h)$ до нуля. На основі відомого факту варіаційного числення про рівність нулеві інтеграла від добутку двох функцій, отримаємо

$$\int_a^b \frac{d\tau}{x(\tau)} - \frac{1}{x^2(t)}\int_a^b x(\tau)d\tau \equiv 0.$$

Записане інтегральне рівняння має єдиний розв'язок $x(t) = const$, який являється екстремаллю для функціонала F.

Те, що при $x(t) = const$ функціонал F досягає максимуму слідує з того, що в цьому випадку $d^2F(x;h^2) < 0$.

В цьому легко переконатись, шляхом безпосередньої перевірки, обчисливши значення

$$d^2F(x;h^2) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2}F(x(t) + \varepsilon\cdot h(t))\Big|_{\varepsilon=0},$$

при $x(t) = const.$

На цьому і завершуємо доведення теореми.

Теорема 6. Нехай $x(t)>0; y(t)>0$ - функції з простору $C_{[a;b]}$. Має місце нерівність.

$$\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x(t)}}+\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{y(t)}}\le\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x(t)+y(t)}}\ . \qquad (7)$$

Доведення. Використаємо нерівність (1).

Замінимо

$$x_i=\frac{x(\zeta_i)}{\Delta\zeta_i};\ y_i=\frac{y(\zeta_i)}{\Delta\zeta_i};\ (i=0;n-1),\ \Delta\zeta_i=\frac{b-a}{n}$$

ζ_i - довільні точки на проміжках розбиття $[a;b]$ на відрізки. А далі переходимо до границі при $n\to\infty$. Зауважимо, що знак рівності в нерівності (7) можливий при $y(t)\equiv\alpha x(t)$, де $\alpha>0$ - дійсне число.

Теорема 7. Має місце нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}}\le\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n}x_i(t)}}, \qquad (8)$$

де $x_i(t)-$ функції з $C_{[a;b]}$.

Доведення здійснюється методом математичної індукції.

При $n=2$ одержуємо нерівність (7).

Нехай нерівність (8) виконується $n=k$, тоді при $n=k+1$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}}+\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_{k+1}}}\le\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{k}x_i(t)}}+\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_{k+1}(t)}}\le\frac{1}{\int_a^b \sum_{i=1}^{k+1}x_i(t)}\ .$$

Нехай $X(t;\tau)$ додатня і неперервна функція на $[a;b]\times[a;b]$. І нехай при $\tau\to\tau_0$ $(\tau_0\in[a;b])$ функція $X(t;\tau)$ рівномірно прямує до $z(t)=X(t;\tau_0)$. Розіб’ємо проміжок $[a;b]_\tau$ на n рівних частин. Тоді $X(t;\zeta_i)=z_i(t)>0$ - неперервні функції однієї змінної на $[a;b]_t$, де ζ_i - деякі точки з проміжків розбиття.

Застосовуючи (8), можна записати

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\zeta_i}{\int_a^b \frac{dt}{X(t;\zeta_i)}}\le\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n}X(t;\zeta_i)}\Delta\zeta_i}\ .$$

Переходимо до границі при $n\to\infty$, що повністю можливо при накладених умовах. Одержимо

$$\int_a^b \frac{d\tau}{\int_a^b \frac{dt}{X(t;\tau)}}\le\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{\int_a^b X(t;\tau)d\tau}}\ . \qquad (9)$$

Висновки. Відомо, що якщо $f-$ опукла функція $(f''>0)$, $\rho(t);\ x(t)$ довільні додатні функції на $[a;b]$, то має місце нерівність Ієнсена

$$f\left(\frac{\int_a^b \rho(t)x(t)dt}{\int_a^b \rho(t)dt}\right) \le \frac{\int_a^b \rho(t)f[x(t)]dt}{\int_a^b \rho(t)dt}\ . \tag{10}$$

Як частинний випадок (10) при $\rho(t)\equiv 1;$ та $f(t)=\frac{1}{t}$ отримуємо нерівність

$$\left(\int_a^b \frac{dt}{x(x)}\right)^{-1} \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b x(t)dt \tag{11}$$

– аналог співвідношення між середніми гармонічним і арифметичним в $C_{[a;b]}$.

Застосовуючи (9), дамо оцінку лівої і правої сторони нерівності (8)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\int_a^b \frac{dt}{x_i(t)}} \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\right)dt$$

$$\left(\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n}x_i(t)}\right)^{-1} \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\right)dt\ .$$

Тим самим встановлено, що отримана нерівність (8) більш точна, ніж відоме співвідношення (11) в тому розумінні, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n}x_i(t)}\right)^{-1} \le \left(\int_a^b \frac{dt}{\sum_{i=1}^{n}x_i(t)}\right) \le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\right)dt\ .$$

Список використаних джерел.

1. Д. И. Боднар. Ветвящиеся цепные дроби. Киев. Наукова думка 1986. - 174с.
2. Р. И. Михальчук. Континуальный аналог цепных дробей. Дисс. на соиск. уч.ст.к.ф-м.н. Луцк 1986.-120с.